홀로 공부하는 수능

2022학년도 개정 수능 수학

블랙홀수

수학 II

문제

도서출판 홀수
Holsoo Publishers

블랙홀수

홀로 공부하는 수능 수학 기출 분석

새롭게 바뀐 2022학년도 수능 수학 어떻게 공부해야 할까?

2022학년도 수능 수학은 2015 개정 교육과정의 취지에 따라 공통과목+선택과목 구조 체제로 전환됩니다.
무엇이 어떻게 바뀌었을까요?

① 수학에서 공통과목은 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'이고, 선택과목은 '확률과 통계', '미적분', '기하'입니다.
② 공통과목은 공통 응시하고 선택과목 중 1과목을 선택하여 응시하기 때문에 두 개의 시험지를 받게 됩니다.
③ 총 30문항 중, 공통과목은 22문항(선다형 15문항/단답형 7문항)이며, 선택과목은 8문항(선다형 6문항/단답형 2문항)입니다.

	공통과목 (수학Ⅰ, 수학Ⅱ)	선택과목 택1 (확률과 통계, 미적분, 기하)	합계
문항 수	22문항 (선다형 15문항/단답형 7문항)	8문항 (선다형 6문항/단답형 2문항)	30문항 (선다형 21문항/단답형 9문항)
배점	74점 (선다형 50점/단답형 24점)	26점 (선다형 18점/단답형 8점)	100점 (선다형 68점/단답형 32점)
시험 시간	100분		

수능 수학이 새롭게 바뀌었으니, 이전의 기출문제를 분석하는 것은 무용지물일까요?
아닙니다! 수능 시험의 형식은 바뀌었지만, 수능 수학 시험이 수험생에게 요구하는 학습 내용은 그대로입니다.
변화된 형식에 익숙해지되, 수능 수학에서 요구하는 지식과 시험의 성격은 기출 분석을 통해 발견해야 합니다.
우리가 기출문제를 분석해야 하는 이유는 다음과 같습니다.

1

기출 분석을 통해
수능 수학 시험의 성격을
이해할 수 있습니다.

2

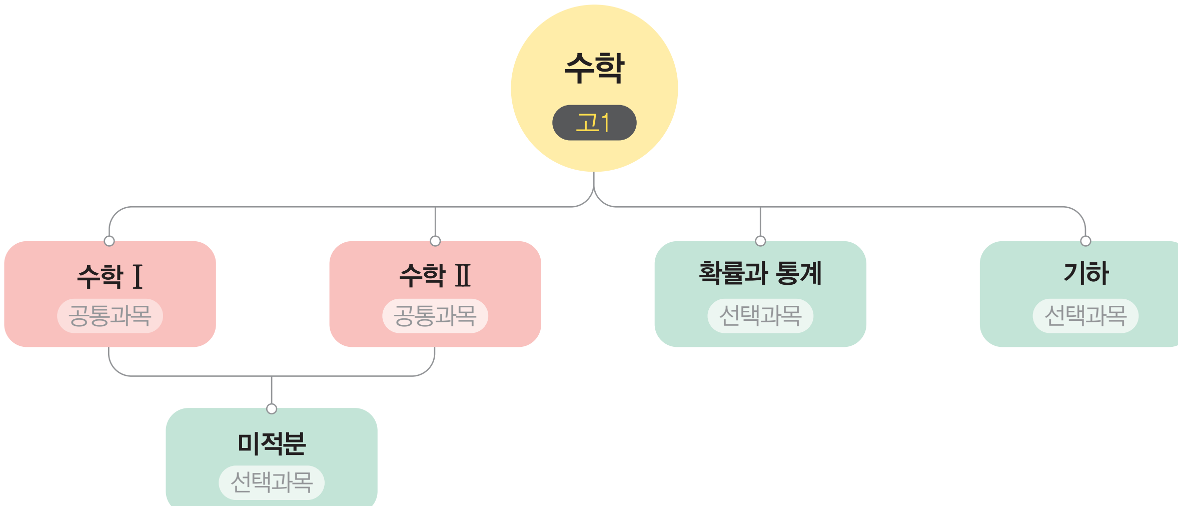
기출 분석을 통해
수능에서 요구하는
문제 해결의 사고 과정을
알 수 있습니다.

3

기출 분석을 통해
평가원에서 사용하는 표현에
익숙해질 수 있습니다.

2022학년도 수능 수학 학습법

2015 개정 교육과정에서 수학 학습의 위계성과 연계성



2015 개정 교육과정에서 수학 과목의 위계 · 연계성을 보면 '미적분'을 제외한 나머지 '수학 Ⅰ', '수학 Ⅱ', '확률과 통계', '기하'는 위계가 없습니다. 따라서 '수학 Ⅰ', '수학 Ⅱ', '확률과 통계', '기하' 중에서는 어떤 과목부터 학습을 시작해도 무방합니다. 학생 개개인의 계획 및 여건에 맞게 학습 순서를 정할 수 있다는 뜻입니다.

미적분 선택

'미적분'의 학습 내용은 '수학 Ⅰ', '수학 Ⅱ'의 학습 내용과 밀접한 관련이 있으므로 '미적분'을 선택한 학생은 반드시 공통과목인 '수학 Ⅰ', '수학 Ⅱ'를 학습한 이후에 선택과목 '미적분'을 학습해야만 합니다.

확률과 통계 / 기하 선택

'확률과 통계' 혹은 '기하'를 선택한 학생은 필요에 맞게 학습 순서를 정해도 되지만 특별히 정하지 않았다면, 공통과목인 '수학 Ⅰ', '수학 Ⅱ'를 먼저 공부한 다음에 자신이 선택한 선택과목을 공부하는 것을 권장합니다.

! 단, 고등학교 1학년 때 배우는 '수학' 과목의 개념들은 간접적으로 출제 범위에 포함되며, 모든 공통과목과 선택과목의 기본입니다. '수학' 에서 배우는 핵심 개념과 내용 요소는 아래에 정리를 해 두었습니다. 본격적으로 공통과목과 선택과목을 공부하기 앞서 '수학' 과목에서 부족한 부분이 있다면 반드시 교과서를 통해 학습한 이후에 기출문제를 분석해야 합니다.

- **다항식** – 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해
- **방정식과 부등식** – 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식과 부등식
- **도형의 방정식** – 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동
- **집합과 명제** – 집합, 명제
- **함수와 그래프** – 함수, 유리함수와 무리함수
- **경우의 수** – 경우의 수, 순열과 조합

홀로 공부하는 이상적인 수능 수학 기출 분석 4 STEP

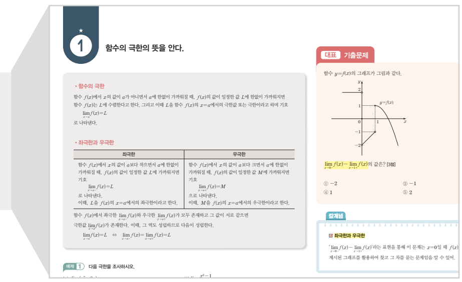
'최근 5개년 기출 + 2022학년도 예시문항'과 '교과서의 개념'이 만나면 '수학의 기준'이 잡힌다.

- 수능 수학에서 평가 요소는 교육과정의 성취기준에 근거하고 있습니다. 성취기준은 적용된 교육과정에 따라 다르기 때문에 해당 교육과정의 범위에서 벗어난 기출문제는 오히려 독이 될 수 있습니다.
- 2022학년도 수능 수학을 대비하기 위해서는 2015 개정 교육과정을 바탕으로 한 '교과서 개념'이 반영된 기출문제를 기반으로 공부해야 합니다.

N회독

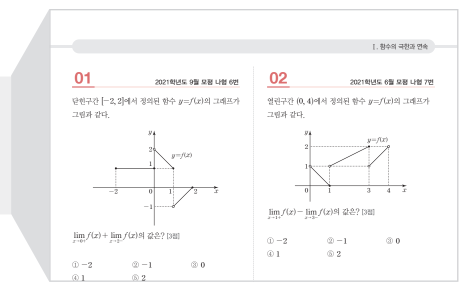
STEP 1

성취기준에 따른 교과서 개념을 정리하고 예제를 통해 구체적으로 개념을 체화한 후, 칼개념을 어떻게 실제 문제 풀이에 적용해 나가는지 대표 기출문제로 연습합니다.



STEP 2

동일한 성취기준으로 분류된 5개년 기출문제들을 통해 스스로 문제 풀이에 필요한 칼개념이 무엇인지, 그 칼개념을 어떻게 적용하는지를 생각하며 학습합니다.



STEP 3

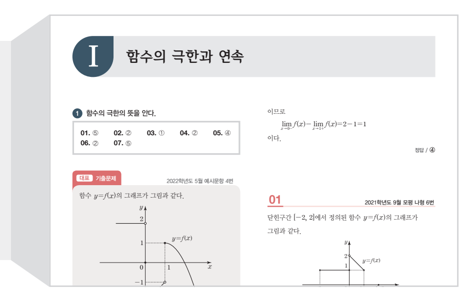
그룹화된 문제를 풀어본 후, 각 문제마다 자신의 풀이 과정에 적용한 칼개념과 〈해설 책〉 [1부]의 칼개념을 비교하여 제대로 적용했는지, 빠뜨린 개념은 없는지를 확인합니다.

불일치 / 일치

STEP 4

자신의 풀이에 정확한 칼개념을 적용하지 않았거나 빠뜨린 개념이 있다면 그 개념이 무엇인지 확인하고, 다시 올바르게 칼개념을 적용하여 문제를 풀어봅니다.

자신의 풀이에 정확한 칼개념이 잘 적용되었다면, 자신의 풀이와 〈해설 책〉 [2부]의 해설을 비교해 가며 한 번 더 정리합니다.



개념 이해 부족

제시된 칼개념을 정확하게 이해할 수 없다면 〈문제 책〉에 제시된 성취기준에 따른 교과서 개념을 다시 학습한 후, 그 문제를 반복해서 풀어봅니다.

블랙홀수의 심화 해설

• 동일한 성취기준과 평가 요소가 반영된 개념별로 분류된 문제들에 대한 정답과 해설을 친절하고 자세히 담았습니다.

1부 문제풀이에 적용된 칼개념 모음

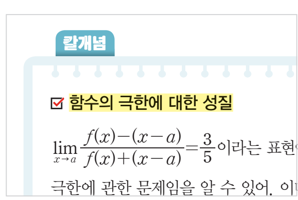
문제별로 풀이에 적용된 칼개념과 부개념만 따로 모아 놓아, 학생들이 스스로 문제를 풀어본 후 자신이 문제풀이에 적용한 개념들과 쉽게 비교할 수 있도록 하였습니다.

2부 정답과 해설

수록된 모든 기출문제를 빠짐없이 하나하나 친절하게 해설하였습니다.
칼개념을 적용해서 풀어나가는 과정에서, 문제의 상황을 이해하는 데 도움이 되는 개념이나 심화된 개념이 필요할 때 모두의 질문, 풀이를 풀다, 개념홀릭을 통해 스스로 학습하고 분석하는 데 어려움이 없도록 하였습니다.

칼개념

발문을 통해 어떤 개념을 떠올리고 문제를 해석해야 하는지를 정리하였습니다. 문제 풀이에 이용된 핵심적인 칼개념은 형광펜으로, 부수적인 개념은 밑줄로 표시해두어 스스로 학습하는 데 도움이 되도록 하였습니다.


칼개념

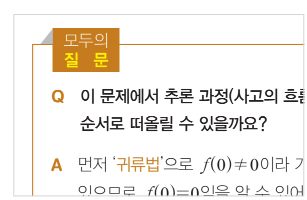
☑ 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$이라는 표현

극한에 관한 문제임을 알 수 있어. 이

모두의 질문

학생들이 문제를 풀 때 자주 하는 실수, 질문들에 대한 해결책과 답을 수록하여 불안감과 궁금증을 해소할 수 있도록 하였습니다.


모두의 질문

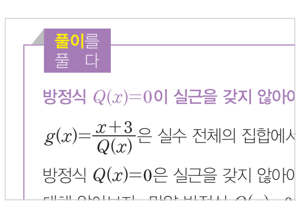
Q 이 문제에서 추론 과정(사고의 흐름

순서로 떠올릴 수 있을까요?

A 먼저 '귀류법'으로 $f(0)\neq 0$이라 가

풀이를 풀다

풀이와 관련된 심화된 해설이나 두 가지 이상의 풀이가 가능할 때 어떤 풀이가 더 유리한지 등을 다시 한번 풀어서 깊이 있게 설명하였습니다.


풀이를 풀다

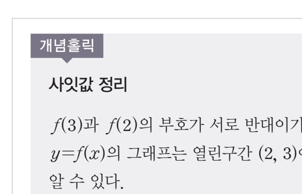
방정식 $Q(x)=0$이 실근을 갖지 않아야

$g(x)=\frac{x+3}{Q(x)}$은 실수 전체의 집합에서

방정식 $Q(x)=0$은 실근을 갖지 않아야

개념홀릭

문제 풀이에 직접 사용되지는 않지만, 문제의 상황을 이해하고 풀이를 진행하는 데에 기반이 되는 기본 개념을 소개하여 탄탄한 기본기 쌓기에 도움이 될 수 있도록 하였습니다.


개념홀릭

사잇값 정리

$f(3)$과 $f(2)$의 부호가 서로 반대이기

$y=f(x)$의 그래프는 열린구간 $(2, 3)$에

알 수 있다.

수학Ⅱ 차례

Ⅰ – 함수의 극한과 연속	문제 책	해설 책
1. 함수의 극한의 뜻을 안다.	p.12	p.30
2. 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	p.19	p.34
3. 함수의 연속의 뜻을 안다. 4. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	p.28	p.43

Ⅱ – 미분	문제 책	해설 책
1. 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 2. 미분계수의 기하적 의미를 이해한다. 3. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.	p.40	p.54
4. 함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. 5. 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.	p.49	p.61
6. 접선의 방정식을 구할 수 있다.	p.61	p.73
7. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다. 8. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	p.67	p.77
9. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 10. 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.	p.79	p.83
11. 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있다.	p.88	p.98
종합추론	p.94	p.101

Ⅲ – 적분	문제 책	해설 책
1. 부정적분의 뜻을 안다. 2. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.	p.102	p.124
3. 정적분의 뜻을 안다. 4. 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.	p.108	p.126
5. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	p.120	p.138
6. 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.	p.129	p.145

수학Ⅱ 3회독 완성 PLAN

• STEP별로 학습을 완료하면 체크하세요.☑ 그리고 수학Ⅱ 전체 1회독 학습 완료 후, 2 · 3회독을 시작하세요.

Ⅰ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1	p.12	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
2	p.19	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
3 / 4	p.28	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

Ⅱ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1 / 2 / 3	p.40	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
4 / 5	p.49	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
6	p.61	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
7 / 8	p.67	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
9 / 10	p.79	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
11	p.88	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
종합추론	p.94	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

Ⅲ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1 / 2	p.102	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
3 / 4	p.108	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
5	p.120	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
6	p.129	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

네가 혼자여도 괜찮은 이유

Ⅱ

미분

★

1·2

미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다. 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.

• 평균변화율

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \ (\text{단, } \Delta x=b-a,\ a\neq b)$$

• 미분계수의 뜻

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

• 미분계수의 기하학적 의미

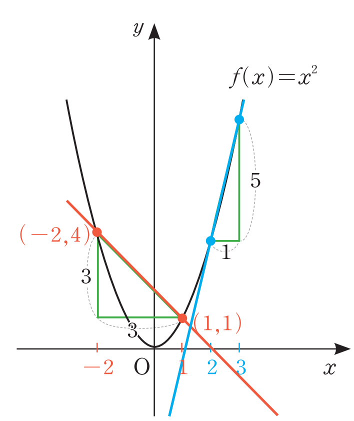
함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예제 1 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하시오.

(1) -2에서 1까지

(2) 2에서 3까지

풀이



(1) 평균변화율의 정의에 의해 구하는 값은

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{1-4}{3}=-1$$

이다.

(2) 평균변화율의 정의에 의해 구하는 값은

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{9-4}{1}=5$$

이다.

오른쪽 그림을 통해 알 수 있듯, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a부터 b까지 변할 때의 평균변화율은, 곡선 위의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

예제 2 함수 $f(x)=x^2+1$의 $x=3$에서의 미분계수를 구하시오.

풀이 1

미분계수의 뜻에 의해

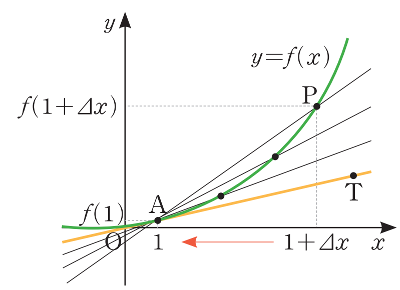
$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(3+\Delta x)^2+1\}-10}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+6\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+6)=6$$

풀이 2

미분계수의 뜻에 의해

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+1)-(3^2+1)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

예제 3 함수 $f(x)=x^2$의 $x=1$에서의 미분계수에 대해 생각해보자.



미분계수의 뜻에 의해,

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2$$

이다. 이 식이 가지는 기하학적 의미를 위 그림을 통해 살펴보자. 두 점 A, P를 각각

$\mathrm{A}(1,\ f(1)),\ \mathrm{P}(1+\Delta x,\ f(1+\Delta x))$

라고 하면,

$$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

의 값은 직선 AP의 기울기와 같다. 이때, Δx가 0에 한없이 가까워지면,
이 직선 AP는 일정한 직선 AT에 한없이 가까워진다. 따라서

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=(\text{직선 AT의 기울기})$$

가 성립한다. 이때 직선 AT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이라 하고,
점 A를 이 접선의 접점이라고 한다.
일반적으로 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

대표 기출문제

2020학년도 수능 나형 20번

함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x\le 0) \\ x-1 & (0<x\le 2) \\ 2x-3 & (x>2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.

ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

칼개념

☑ **미분가능성**

보기의 ㄴ, ㄷ에 '실수 전체의 집합에서 미분가능'이라는 표현에서 이 문제는 미분가능성에 대한 문제임을 알 수 있어. 그런데 상수가 아닌 다항식 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$의 구간별 경계인 $x=0$과 $x=2$에서의 미분가능의 뜻을 사용해서 미분가능성을 조사하면 문제를 해결할 수 있을 거야.

☑ **함수의 연속의 뜻**

☑ **함수의 극한에 대한 성질**

풀이

상수가 아닌 다항식 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다.

ㄱ. 함수 $p(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x\to 0-}p(x)f(x)=\lim_{x\to 0+}p(x)f(x)=p(0)f(0)$$

(함수의 연속의 뜻)

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{x\to 0-}p(x)f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0-}\{p(x)\times(-x)\}$$
$$=\lim_{x\to 0-}p(x)\times\lim_{x\to 0-}(-x)$$

(함수의 극한에 대한 성질)

$$=p(0)\times 0=0$$

$$\lim_{x\to 0+}p(x)f(x)$$
$$=\lim_{x\to 0+}\{p(x)\times(x-1)\}$$
$$=\lim_{x\to 0+}p(x)\times\lim_{x\to 0+}(x-1)$$

(함수의 극한에 대한 성질)

$$=p(0)\times(-1)=-p(0)$$
$$p(0)f(0)=p(0)\times 0=0$$

이므로 $-p(0)=0$에서 $p(0)=0$이다. (참)

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2$에서도 미분가능해야 한다.

즉, $p(x)f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 존재해야 하므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{p(2+h)f(2+h)-p(2)f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0+}\frac{p(2+h)f(2+h)-p(2)f(2)}{h}$$

이어야 한다.

이때,

$$\lim_{h\to0-}\frac{p(2+h)f(2+h)-p(2)f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{p(2+h)\times(2+h-1)-p(2)\times1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{p(2+h)\times(1+h)-p(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{p(2+h)+hp(2+h)-p(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\left\{\frac{p(2+h)-p(2)}{h}+p(2+h)\right\}$$
$$=\underbrace{\lim_{h\to0-}\frac{p(2+h)-p(2)}{h}+\lim_{h\to0-}p(2+h)}_{\text{함수의 극한에 대한 성질}}$$
$$=p'(2)+p(2)$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{p(2+h)f(2+h)-p(2)f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{p(2+h)\times(4+2h-3)-p(2)\times1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{p(2+h)\times(1+2h)-p(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{p(2+h)+2hp(2+h)-p(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{p(2+h)-p(2)}{h}+2p(2+h)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{p(2+h)-p(2)}{h}+\lim_{h\to0+}2p(2+h)$$
$$=p'(2)+2p(2)$$

따라서

$$p'(2)+p(2)=p'(2)+2p(2)$$

에서 $p(2)=0$이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x\neq0$, $x\neq2$인 모든 실수에서 미분가능하므로 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 $x=0$, $x=2$에서 미분가능하기만 하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$의 $x=0$에서의 미분계수와 $x=2$에서의 미분계수가 존재하면 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하게 된다.

이때, $p(x)=x^2(x-2)$라 하면

$$\lim_{x\to0-}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(0)\{f(0)\}^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{x^4(x-2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0-}\{x^3(x-2)\}=0$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(0)\{f(0)\}^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\{x(x-1)^2(x-2)\}=0$$

이다.

따라서

$$\lim_{x\to0-}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(0)\{f(0)\}^2}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(0)\{f(0)\}^2}{x}$$

이므로 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$은 $x=0$에서 미분가능하다.

또한,

$$\lim_{x\to2-}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(2)\{f(2)\}^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}\frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2-}x^2(x-1)^2=4$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(2)\{f(2)\}^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2(x-2)(2x-3)^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}x^2(2x-3)^2=4$$

이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(2)\{f(2)\}^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{p(x)\{f(x)\}^2-p(2)\{f(2)\}^2}{x-2}$$

이다.

따라서 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$은 $x=2$에서 미분가능하다.

그러므로 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

그런데 $p(x)=x^2(x-2)$이므로 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어지지 않는다. (거짓)

정답 / ②

01

2017학년도 수능 나형 26번

곡선 $y=x^3-ax+b$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

02

2017학년도 9월 모평 나형 25번

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & (x<1) \\ x^4+a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

03

2018학년도 6월 모평 나형 16번

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x\leq -2) \\ 2x & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04

2021학년도 9월 모평 나형 10번

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (x<1) \\ bx+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

네가 혼자여도 괜찮은 이유

제 1 부

칼개념 모음

I 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한의 뜻을 안다.

대표 기출문제

☑ 좌극한과 우극한

'$\lim_{x\to0-}f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)$'라는 표현을 통해 이 문제는 $x=0$일 때 $f(x)$의 좌극한과 $x=1$일 때 $f(x)$의 우극한을, 제시된 그래프를 활용하여 찾고 그 차를 묻는 문제임을 알 수 있어.

01

☑ 좌극한과 우극한

'$\lim_{x\to0+}f(x)+\lim_{x\to2-}f(x)$'라는 표현을 통해 이 문제는 $x=0$일 때 $f(x)$의 우극한과 $x=2$일 때 $f(x)$의 좌극한을, 제시된 그래프를 활용하여 찾고 그 합을 묻는 문제임을 알 수 있어.

02~07

☑ 좌극한과 우극한

2 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

대표 기출문제

☑ 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$이라는 표현에서 이 문제는 함수의 극한에 관한 문제임을 알 수 있어. 이때 x가 a에 한없이 가까워짐에 따라 분모와 분자의 값이 0으로 한없이 가까워짐을 알 수 있지. 즉, $\frac{0}{0}$의 꼴이지? 따라서 주어진 함수 $f(x)$가 이차함수라는 조건을 이용해 이 부정형을 풀어줘야 해. 그 후 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 문제를 풀 수 있을 거야.

☑ 함수의 연속의 뜻

☑ 미분계수의 뜻

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$에서 분모와 분자에 모두 $f(x)$가 있고, 각각 $x-a$가 더해져 있고 빼져 있는 것을 알 수 있지? 만약 분모와 분자를 $x-a$로 나눈다면 $\frac{f(x)}{x-a}$의 꼴이므로 미분계수의 뜻을 떠올릴 수 있겠지? 이제 주어진 문제를 다른 조건들과 미분계수를 활용해서 풀어봐.

☑ 함수의 극한에 대한 성질

01

☑ 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}$에서 x가 2에 한없이 가까워짐에 따라 분모의 값이 0으로 한없이 가까워짐을 알 수 있지. 즉 $\frac{0}{0}$의 꼴이지? 따라서 분모에서 0에 수렴하는 부분을 제거한 후, 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 문제를 풀 수 있을 거야.

02

☑ 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}$에서 x가 -1에 한없이 가까워짐에 따라 분모의 값이 0으로 한없이 가까워짐을 알 수 있지. 즉 $\frac{0}{0}$의 꼴이지? 따라서 분모에서 0에 수렴하는 부분을 제거한 후, 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 문제를 풀 수 있을 거야.

03

☑ 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-6x}{x-2}$에서 x가 2에 한없이 가까워짐에 따라 분모의 값이 0으로 한없이 가까워짐을 알 수 있지. 즉 $\frac{0}{0}$의 꼴이지? 따라서 분모에서 0에 수렴하는 부분을 제거한 후, 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 문제를 풀 수 있을 거야.

04

☑ **함수의 극한에 대한 성질**

우선

$$\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1,\ \ \lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=a$$

라는 표현에서 함수의 극한에 관한 문제임을 알 수 있어. 그런데 극한값 안에 포함된 $(x+1)$과 $(2x^2+1)$은 둘 다 실수 전체의 집합에서 연속인 함수이기 때문에 각각 x가 1로 한없이 가까워질 때 그 극한값을 구할 수 있지? 따라서 극한의 성질을 잘 이용하면 $\lim_{x\to1}f(x)$에 대한 조건을 얻을 수 있어. 즉, 이 문제는 함수의 극한에 대한 성질을 이용하는 문제인 것이지.

05

☑ **함수의 극한에 대한 성질**

문제에서 $f(2)$를 구하라 했으므로 다항식 $f(x)$의 함수식을 결정해야 해. 이제 $f(x)$에 관한 정보를 찾기 위해 주어진 조건 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$을 보면

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x}\times x\right\}$$

임을 알 수 있지? 따라서 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 $f(x)$에 대한 조건들을 얻을 수 있어.

06

☑ **함수의 극한에 대한 성질**

문제에서 $f(2)$의 최댓값을 구하라 했으므로 다항식 $f(x)$의 함수식을 결정해야 해. 먼저 다항식 $f(x)g(x)$의 함수식을 구한 후, 주어진 조건과 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 문제가 해결될 거야.

07

☑ **함수의 극한에 대한 성질**

문제에서 $f(2)$의 최댓값을 구하라 했으므로 다항식 $f(x)$의 함수식을 결정해야 해.
이제 $f(x)$에 관한 정보를 찾기 위해 주어진 조건 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$를 보면

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x)}{x+1}\times(x+1)\right\}$$

임을 알 수 있지? 따라서 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 $f(x)$에 대한 조건들을 얻을 수 있어.

08

☑ **함수의 극한에 대한 성질**

문제에서 $f(1)$의 최댓값을 구하라 했으므로 다항식 $f(x)$의 함수식을 결정해야 해. 주어진 조건과 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 문제가 해결될 거야.

❸ 함수의 연속의 뜻을 안다.
❹ 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

대표 기출문제

☑ **함수의 연속의 뜻**

주어진 함수 $f(x)$에 대하여 '함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속'이라는 표현에서 함수의 연속에 관한 문제인 것을 알 수 있어. $x\neq a$인 모든 실수에 대해 $|f(x)|$가 연속임을 알 수 있으니 $x=a$인 지점에서만 연속성을 확인하면 되는 거야. 그럼 함수의 연속의 뜻을 사용해야겠지?

☑ 좌극한과 우극한

01

☑ **함수의 연속의 뜻**

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 연속함수의 뜻을 사용하여 문제를 해결할 수 있어.

02

☑ **함수의 연속의 뜻**

문제의 조건에 의하면 $f(x)$는 연속함수이니까 $f(2)=\lim_{x\to2}f(x)$임을 알 수 있어. 그럼 우리는 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값을 구하면 되는데 이는 주어진 $\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x-2}=12$라는 조건에 함수의 극한에 대한 성질들을 이용하면 구할 수 있어. 이렇게 주어진 함수에 여러 함수를 결합한 극한값이 조건으로 제시되어 있는 경우, 함수의 극한에 대한 성질을 활용하면 풀 수 있는 경우가 많으니 참고하도록 해.

☑ 함수의 극한에 대한 성질

03

☑ 연속함수의 성질

☑ 함수의 연속의 뜻

주어진 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이라는 표현에서 함수의 연속에 관련된 문제라는 것을 알 수 있어. 이때, 주어진 함수 $f(x)$는 $x \neq 3$인 점들에 대해서는 연속함수의 성질을 이용하면 연속임을 알 수 있어. 즉, $x=3$에서의 연속성만 만족하면 되는 것이지. 따라서 연속함수의 뜻을 사용하면 문제를 해결할 수 있어.

☑ 함수의 극한에 대한 성질

04

☑ 함수의 연속의 뜻

주어진 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이라는 표현에서 함수의 연속에 관한 문제인 것을 알 수 있어. $x \neq 1$인 모든 실수에 대해 $f(x)$가 연속임을 알 수 있으니 $x=1$인 지점에서만 연속성을 확인하면 되는 거야. 그럼 함수의 연속의 뜻을 사용해야겠지?

☑ 좌극한과 우극한

05

☑ 함수의 연속의 뜻

주어진 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이라는 표현에서 함수의 연속에 관한 문제인 것을 알 수 있어. $x \neq 1$인 모든 실수에 대해 $f(x)$가 연속임을 알 수 있으니 $x=1$인 지점에서만 연속성을 확인하면 되는 거야. 그럼 함수의 연속의 뜻을 사용해야겠지?

☑ 좌극한과 우극한

06

☑ 함수의 연속의 뜻

문제 조건으로 함수 $g(x)$의 $x=0$에서의 좌극한과 우극한에 대하여 제시되어 있어. 이 조건을 활용하기 위해 함수 $f(x)$가 '$x=0$에서 연속'임을 이용할 수 있어.

☑ 좌극한과 우극한

☑ 함수의 극한에 대한 성질

07

☑ 함수의 연속의 뜻

☑ 연속함수의 성질

주어진 함수가 '실수 전체의 집합에서 연속'이라는 표현에서 함수의 연속에 관한 문제인 것을 알 수 있어. 이때, 연속함수의 성질에 의해 우리가 연속성을 조사해봐야 할 점은 $x=0$과 $x=a$인 것을 알 수 있을 거야. 그럼 함수의 연속의 뜻을 떠올려보면 문제를 해결할 수 있겠지?

☑ 좌극한과 우극한

☑ 귀류법

08

☑ 연속함수의 성질

'$\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속'이라는 표현에서 우리는 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 연속성을 파악해야겠지? 이때, $f(x)$가 $x \neq 2$인 점에서 모두 연속이고 $f(x)=0$을 만족하는 x가 존재하지 않음을 알 수 있어. 즉, 연속함수의 성질을 활용할 수 있어.

☑ 함수의 연속의 뜻

☑ 좌극한과 우극한

09

☑ 연속함수의 성질

'$\dfrac{x}{f(x)}$'에서 $f(x)$가 이차함수이므로 연속함수의 성질을 사용할 수 있음을 알 수 있어. 그런데 이렇게 분수 형태의 연속함수의 성질을 사용할 때는 제약 조건이 있어. 그 조건을 잘 생각하면서 연속함수의 성질을 활용하면 문제를 풀 수 있을 거야.

☑ 함수의 극한에 대한 성질

제 2 부

정답과 해설

III 적분

1. 부정적분의 뜻을 안다.
2. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

01. 12	**02.** 8	**03.** 9

대표 기출문제 2022학년도 5월 예시문항 6번

다항함수 $f(x)$가

$f'(x)=3x^2-kx+1$, $f(0)=f(2)=1$

을 만족시킬 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

칼개념

☑ 부정적분의 뜻

주어진 조건

'$f'(x)=3x^2-kx+1$, $f(0)=f(2)=1$'

에서 상수 k의 값을 구하려면 원시함수 $f(x)$를 찾아야 돼.
그렇다면 부정적분의 뜻을 이용해야 되겠지?

☑ 다항함수의 부정적분

풀이

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)$이므로 부정적분의 뜻에 의해

$$\int f'(x)dx=f(x)+C_1 \quad (C_1\text{은 적분상수})$$

이다. 이때,

$$\int f'(x)dx=\int(3x^2-kx+1)dx$$

$$=\underbrace{x^3-\frac{1}{2}kx^2+x+C_2}_{\text{(다항함수의 부정적분)}} \quad (C_2\text{는 적분상수})$$

이므로

$$f(x)=x^3-\frac{1}{2}kx^2+x+C \quad (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있다.

그런데 $f(0)=1$, $f(2)=1$이므로

$$f(0)=C=1,\quad f(2)=10-2k+C=1$$

이다.

따라서 구하는 값은 $k=5$이다.

정답 / ①

01

2021학년도 수능 나형 23번

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+4x+5$이고 $f(0)=4$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

칼개념

☑ 부정적분의 뜻

주어진 조건 '$f'(x)=3x^2+4x+5$', '$f(0)=4$'에서
$f(1)$의 값을 구하기 위해서는 원시함수 $f(x)$를 찾아야 돼.
그렇다면 부정적분의 뜻을 이용해야 되겠지?

☑ 다항함수의 부정적분

풀이

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)$이므로 부정적분의 뜻에 의해

$$\int f'(x)dx=f(x)+C_1 \quad (C_1\text{은 적분상수})$$

이다. 이때,

$$\int f'(x)dx=\int(3x^2+4x+5)dx$$

$$=\underbrace{x^3+2x^2+5x+C_2}_{\text{(다항함수의 부정적분)}} \quad (C_2\text{는 적분상수})$$

이므로

$$f(x)=x^3+2x^2+5x+C \quad (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있다.

그런데 $f(0)=4$이므로 $f(0)=C=4$이다.

따라서

$$f(x)=x^3+2x^2+5x+4$$

이므로 구하는 값은

$$f(1)=1^3+2\times1^2+5\times1+4=12$$

이다.

정답 / 12

02

2021학년도 9월 모평 나형 23번

함수 $f(x)$가

$$f'(x)=-x^3+3,\quad f(2)=10$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [3점]

칼개념

☑ **부정적분의 뜻**

주어진 조건 '$f'(x)=-x^3+3$, $f(2)=10$'에서
$f(0)$의 값을 구하기 위해서는 원시함수 $f(x)$를 찾아야 돼.
그렇다면 부정적분의 뜻을 이용해야 되겠지?

☑ **다항함수의 부정적분**

풀이

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)$이므로 부정적분의 뜻에 의해

$$\int f'(x)dx=f(x)+C_1 \quad (C_1\text{은 적분상수})$$

이다. 이때,

$$\int f'(x)dx=\int(-x^3+3)dx$$

$$=\underbrace{-\frac{1}{4}x^4+3x+C_2}_{\text{(다항함수의 부정적분)}} \quad (C_2\text{는 적분상수})$$

이므로

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x+C \quad (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있다.

그런데 $f(2)=10$이므로

$$f(2)=-\frac{1}{4}\times 2^4+3\times 2+C=10$$

에서 $C=8$이다.

따라서

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x+8$$

이므로 구하는 값은 $f(0)=8$이다.

정답 / 8

03

2021학년도 6월 모평 나형 23번

함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x^3+x,\quad f(0)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

칼개념

☑ **부정적분의 뜻**

주어진 조건 '$f'(x)=x^3+x$, $f(0)=3$'에서
$f(2)$의 값을 구하기 위해서는 원시함수 $f(x)$를 찾아야 돼.
그렇다면 부정적분의 뜻을 이용해야 되겠지?

☑ **다항함수의 부정적분**

풀이

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)$이므로 부정적분의 뜻에 의해

$$\int f'(x)dx=f(x)+C_1 \quad (C_1\text{은 적분상수})$$

이다. 이때,

$$\int f'(x)dx=\int(x^3+x)dx$$

$$=\underbrace{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C_2}_{\text{(다항함수의 부정적분)}} \quad (C_2\text{는 적분상수})$$

이므로

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C \quad (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있다.

그런데 $f(0)=3$이므로 $C=3$이다.

따라서

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+3$$

이므로 구하는 값은 $f(2)=9$이다.

정답 / 9