홀로 공부하는 수능

2022학년도 개정 수능 수학

블랙홀수

미적분

문제

도서출판 홀수
Holsoo Publishers

블랙홀수

홀로 공부하는 수능 수학 기출 분석

새롭게 바뀐 2022학년도 수능 수학 어떻게 공부해야 할까?

2022학년도 수능 수학은 2015 개정 교육과정의 취지에 따라 공통과목+선택과목 구조 체제로 전환됩니다.
무엇이 어떻게 바뀌었을까요?

① 수학에서 공통과목은 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'이고, 선택과목은 '확률과 통계', '미적분', '기하'입니다.
② 공통과목은 공통 응시하고 선택과목 중 1과목을 선택하여 응시하기 때문에 두 개의 시험지를 받게 됩니다.
③ 총 30문항 중, 공통과목은 22문항(선다형 15문항/단답형 7문항)이며, 선택과목은 8문항(선다형 6문항/단답형 2문항)입니다.

	공통과목 (수학Ⅰ, 수학Ⅱ)	선택과목 택1 (확률과 통계, 미적분, 기하)	합계
문항 수	22문항 (선다형 15문항/단답형 7문항)	8문항 (선다형 6문항/단답형 2문항)	30문항 (선다형 21문항/단답형 9문항)
배점	74점 (선다형 50점/단답형 24점)	26점 (선다형 18점/단답형 8점)	100점 (선다형 68점/단답형 32점)
시험 시간	100분		

수능 수학이 새롭게 바뀌었으니, 이전의 기출문제를 분석하는 것은 무용지물일까요?
아닙니다! 수능 시험의 형식은 바뀌었지만, 수능 수학 시험이 수험생에게 요구하는 학습 내용은 그대로입니다.
변화된 형식에 익숙해지되, 수능 수학에서 요구하는 지식과 시험의 성격은 기출 분석을 통해 발견해야 합니다.
우리가 기출문제를 분석해야 하는 이유는 다음과 같습니다.

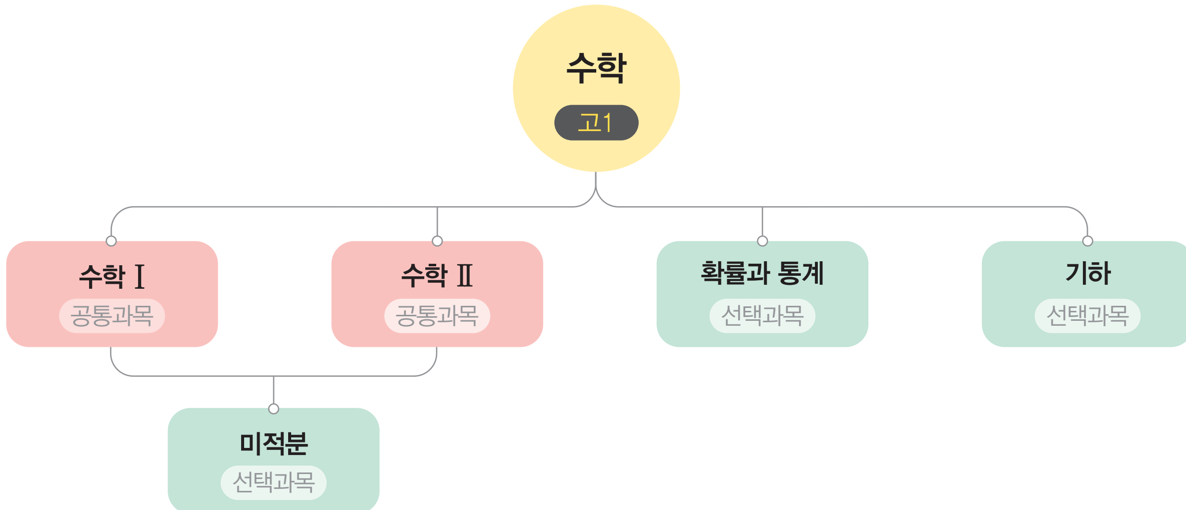
1
기출 분석을 통해
수능 수학 시험의 성격을
이해할 수 있습니다.

2
기출 분석을 통해
수능에서 요구하는
문제 해결의 사고 과정을
알 수 있습니다.

3
기출 분석을 통해
평가원에서 사용하는 표현에
익숙해질 수 있습니다.

2022학년도 수능 수학 학습법

2015 개정 교육과정에서 수학 학습의 위계성과 연계성



2015 개정 교육과정에서 수학 과목의 위계 · 연계성을 보면 '미적분'을 제외한 나머지 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ', '확률과 통계', '기하'는 위계가 없습니다. 따라서 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ', '확률과 통계', '기하' 중에서는 어떤 과목부터 학습을 시작해도 무방합니다. 학생 개개인의 계획 및 여건에 맞게 학습 순서를 정할 수 있다는 뜻입니다.

미적분 선택

'미적분'의 학습 내용은 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'의 학습 내용과 밀접한 관련이 있으므로 '미적분'을 선택한 학생은 반드시 공통과목인 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'를 학습한 이후에 선택과목 '미적분'을 학습해야만 합니다.

확률과 통계 / 기하 선택

'확률과 통계' 혹은 '기하'를 선택한 학생은 필요에 맞게 학습 순서를 정해도 되지만 특별히 정하지 않았다면, 공통과목인 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'를 먼저 공부한 다음에 자신이 선택한 선택과목을 공부하는 것을 권장합니다.

! 단, 고등학교 1학년 때 배우는 '수학' 과목의 개념들은 간접적으로 출제 범위에 포함되며, 모든 공통과목과 선택과목의 기본입니다. '수학' 에서 배우는 핵심 개념과 내용 요소는 아래에 정리를 해 두었습니다. 본격적으로 공통과목과 선택과목을 공부하기 앞서 '수학' 과목에서 부족한 부분이 있다면 반드시 교과서를 통해 학습한 이후에 기출문제를 분석해야 합니다.

- **다항식** – 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해
- **방정식과 부등식** – 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식과 부등식
- **도형의 방정식** – 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동
- **집합과 명제** – 집합, 명제
- **함수와 그래프** – 함수, 유리함수와 무리함수
- **경우의 수** – 경우의 수, 순열과 조합

홀로 공부하는 이상적인 수능 수학 기출 분석 4 STEP

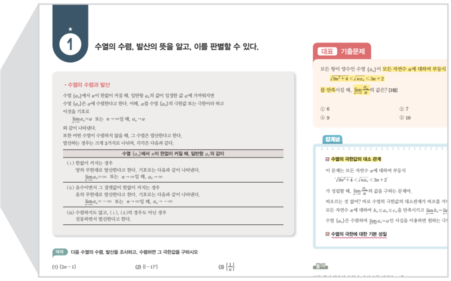
‘최근 5개년 기출 + 2022학년도 예시문항’과 ‘교과서의 개념’이 만나면 ‘수학의 기준’이 잡힌다.

• 수능 수학에서 평가 요소는 교육과정의 성취기준에 근거하고 있습니다. 성취기준은 적용된 교육과정에 따라 다르기 때문에 해당 교육과정의 범위에서 벗어난 기출문제는 오히려 독이 될 수 있습니다.

• 2022학년도 수능 수학을 대비하기 위해서는 2015 개정 교육과정을 바탕으로 한 ‘교과서 개념’이 반영된 기출문제를 기반으로 공부해야 합니다.

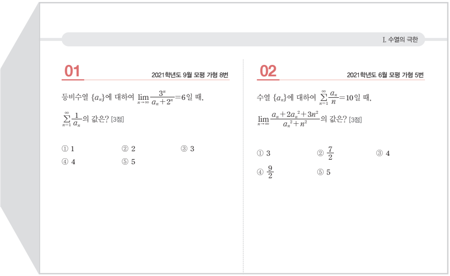
STEP 1

성취기준에 따른 교과서 개념을 정리하고 예제를 통해 구체적으로 개념을 체화한 후, 칼개념을 어떻게 실제 문제 풀이에 적용해 나가는지 대표 기출문제로 연습합니다.



STEP 2

동일한 성취기준으로 분류된 5개년 기출문제들을 통해 스스로 문제 풀이에 필요한 칼개념이 무엇인지, 그 칼개념을 어떻게 적용하는지를 생각하며 학습합니다.



N회독

STEP 3

그룹화된 문제를 풀어본 후, 각 문제마다 자신의 풀이 과정에 적용한 칼개념과 〈해설 책〉 [1부]의 칼개념을 비교하여 제대로 적용했는지, 빠뜨린 개념은 없는지를 확인합니다.

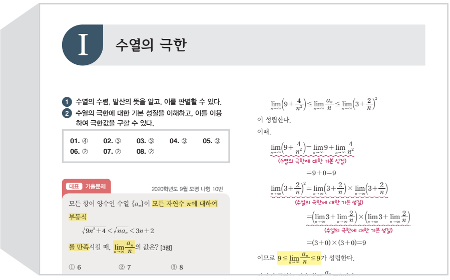
불일치

일치

STEP 4

자신의 풀이에 정확한 칼개념을 적용하지 않았거나 빠뜨린 개념이 있다면 그 개념이 무엇인지 확인하고, 다시 올바르게 칼개념을 적용하여 문제를 풀어봅니다.

자신의 풀이에 정확한 칼개념이 잘 적용되었다면, 자신의 풀이와 〈해설 책〉 [2부]의 해설을 비교해 가며 한 번 더 정리합니다.



개념 이해 부족

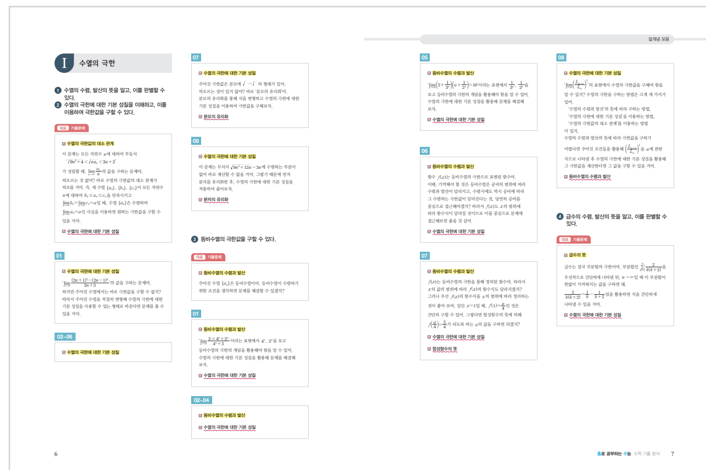
제시된 칼개념을 정확하게 이해할 수 없다면 〈문제 책〉에 제시된 성취기준에 따른 교과서 개념을 다시 학습한 후, 그 문제를 반복해서 풀어봅니다.

블랙홀수의 심화 해설

• 동일한 성취기준과 평가 요소가 반영된 개념별로 분류된 문제들에 대한 정답과 해설을 친절하고 자세히 담았습니다.

1부 문제풀이에 적용된 칼개념 모음

문제별로 풀이에 적용된 칼개념과 부개념만 따로 모아 놓아, 학생들이 스스로 문제를 풀어본 후 자신이 문제풀이에 적용한 개념들과 쉽게 비교할 수 있도록 하였습니다.

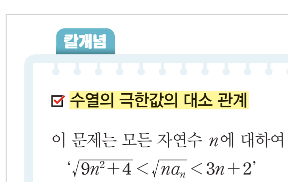


2부 정답과 해설

수록된 모든 기출문제를 빠짐없이 하나하나 친절하게 해설하였습니다.
칼개념을 적용해서 풀어나가는 과정에서, 문제의 상황을 이해하는 데 도움이 되는 개념이나 심화된 개념이 필요할 때 모두의 질문, 풀이를 풀다, 개념홀릭을 통해 스스로 학습하고 분석하는 데 어려움이 없도록 하였습니다.

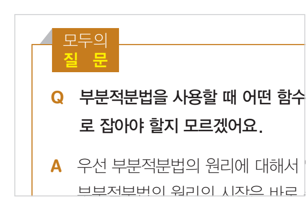
칼개념

발문을 통해 어떤 개념을 떠올리고 문제를 해석해야 하는지를 정리하였습니다. 문제 풀이에 이용된 핵심적인 칼개념은 형광펜으로, 부수적인 개념은 밑줄로 표시해두어 스스로 학습하는 데 도움이 되도록 하였습니다.



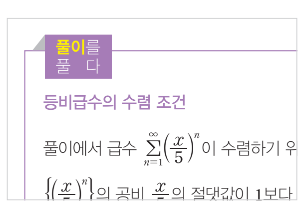
모두의 질문

학생들이 문제를 풀 때 자주 하는 실수, 질문들에 대한 해결책과 답을 수록하여 불안감과 궁금증을 해소할 수 있도록 하였습니다.



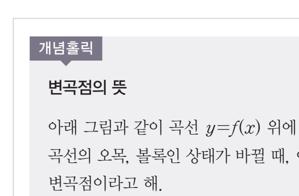
풀이를 풀다

풀이와 관련된 심화된 해설이나 두 가지 이상의 풀이가 가능할 때 어떤 풀이가 더 유리한지 등을 다시 한번 풀어서 깊이 있게 설명하였습니다.



개념홀릭

문제 풀이에 직접 사용되지는 않지만, 문제의 상황을 이해하고 풀이를 진행하는 데에 기반이 되는 기본 개념을 소개하여 탄탄한 기본기 쌓기에 도움이 될 수 있도록 하였습니다.



미적분 차례

미적분 3회독 완성 PLAN

• STEP별로 학습을 완료하면 체크하세요. ☑ 그리고 미적분 전체 1회독 학습 완료 후, 2 · 3회독을 시작하세요.

Ⅰ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1 / 2	p.12	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
3	p.22	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
4	p.29	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
5 / 6	p.35	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

Ⅱ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습 완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1 / 2	p.48	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
3	p.63	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
4	p.69	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
5	p.83	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

Ⅱ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습 완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
6 / 7	p.90	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
8 / 9 / 10	p.101	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
11/12/13	p.121	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
14	p.137	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

Ⅲ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1	p.144	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
2	p.154	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
3	p.163	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
4	p.172	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/
5 / 6 / 7	p.179	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

종합추론	p.192	☐	☐	☐	☐	1회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	2회	☐	/
		☐	☐	☐	☐	3회	☐	/

네가 혼자여도 괜찮은 이유

I

수열의 극한

★

1 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

• 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 가까워지면
수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때, α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고
이것을 기호로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때, $a_n\to\alpha$

와 같이 나타낸다.
또한 어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다.
발산하는 경우는 크게 3가지로 나뉘며, 각각은 다음과 같다.

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이
(ⅰ) 한없이 커지는 경우 양의 무한대로 발산한다고 한다. 기호로는 다음과 같이 나타낸다. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ 또는 $n\to\infty$일 때, $a_n\to\infty$
(ⅱ) 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 경우 음의 무한대로 발산한다고 한다. 기호로는 다음과 같이 나타낸다. $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 또는 $n\to\infty$일 때, $a_n\to-\infty$
(ⅲ) 수렴하지도 않고, (ⅰ), (ⅱ)의 경우도 아닌 경우 진동하면서 발산한다고 한다.

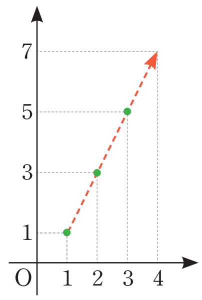
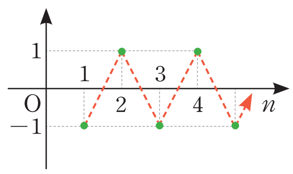
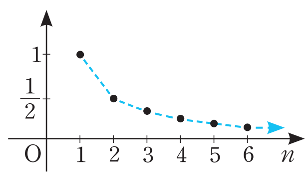
예제 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하시오

(1) $\{2n-1\}$

(2) $\{(-1)^n\}$

(3) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

풀이

	수열의 그래프	
(1) $\{2n-1\}$		그래프를 통해 n의 값이 한없이 커질 때, 이 수열의 일반항도 한없이 커짐을 알 수 있다. 따라서 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.
(2) $\{(-1)^n\}$		그래프를 통해 이 수열의 일반항은 n의 값에 따라 1과 -1이 교대로 나타남을 알 수 있다. 따라서 이 수열은 진동하면서 발산한다.
(3) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$		그래프를 통해 n의 값이 한없이 커질 때, 이 수열의 일반항은 0에 한없이 가까이 가는 것을 알 수 있다. 따라서 이 수열은 0에 수렴한다.

• 수열의 극한값의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때,

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

② 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면
수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.

예제 **수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{6n^2+n-1}{3n^2+3} \le a_n \le \dfrac{6n^2+3n}{3n^2+1}$을 만족한다고 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.**

풀이

모든 n에 대하여 $\dfrac{6n^2+n-1}{3n^2+3} \le a_n \le \dfrac{6n^2+3n}{3n^2+1}$가

성립하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-1}{3n^2+3} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+3n}{3n^2+1}$$

이 성립한다. 이때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+n-1}{3n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}6+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}=\frac{6+0-0}{3+0}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+3n}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}6+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{6+0}{3+0}=2$$

이므로 $2 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 2$가 성립한다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=2$이다.

대표 기출문제

2020학년도 9월 모평 나형 10번

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

칼개념

☑ 수열의 극한값의 대소 관계

이 문제는 모든 자연수 n에 대하여 부등식

'$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$'

가 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하는 문제야.

떠오르는 것 없어? 바로 수열의 극한값의 대소관계가 떠오를 거야. 즉, 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\le a_n\le c_n$을 만족시키고 $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴하며 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$인 사실을 이용하면 원하는 극한값을 구할 수 있을 거야.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

풀이

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$$

를 만족하므로

$$9n^2+4<na_n<(3n+2)^2$$

$$9+\frac{4}{n^2}<\frac{a_n}{n}<\left(3+\frac{2}{n}\right)^2$$

이 성립하고,

$$\lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{4}{n^2}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)^2$$

이 성립한다.

이때,

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{4}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}9+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}}_{\text{(수열의 극한에 대한 기본 성질)}}$$
$$=9+0=9$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}_{\text{(수열의 극한에 대한 기본 성질)}}$$
$$=\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\right)}_{\text{(수열의 극한에 대한 기본성질)}}$$
$$=(3+0)\times(3+0)=9$$

이므로 $9\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le9$가 성립한다.

따라서 구하는 값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=9$이다.

정답 / ④

01

2020학년도 수능 가형 2번

$\lim_{x \to 0} \frac{6x}{e^{4x}-e^{2x}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02

2020학년도 9월 모평 가형 2번

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{6x}-e^{4x}}{2x}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

2020학년도 6월 모평 가형 3번

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}+e^{3x}-2}{2x}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

04

2019학년도 수능 가형 2번

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+5x}{\ln(1+3x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{3}$ ② 2 ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

네가 혼자여도 괜찮은 이유

제 1 부

칼개념 모음

I 수열의 극한

❶ 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

❷ 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

대표 기출문제

☑ 수열의 극한값의 대소 관계

이 문제는 모든 자연수 n에 대하여 부등식
'$\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$'
가 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하는 문제야.
떠오르는 것 없어? 바로 수열의 극한값의 대소 관계가 떠오를 거야. 즉, 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $b_n\le a_n\le c_n$을 만족시키고
$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴하며
$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$인 사실을 이용하면 원하는 극한값을 구할 수 있을 거야.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

01

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

'$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$'의 값을 구하는 문제야.
하지만 주어진 수열에서는 바로 극한값을 구할 수 없지? 따라서 주어진 수열을 적절히 변형해 수열의 극한에 대한 기본 성질을 사용할 수 있는 형태로 바꾼다면 문제를 풀 수 있을 거야.

02~06

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

07

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

주어진 극한값은 분모에 $\sqrt{}-\sqrt{}$의 형태가 있어.
떠오르는 것이 있지 않아? 바로 '분모의 유리화'야.
분모의 유리화를 통해 식을 변형하고 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구해보자.

☑ 분모의 유리화

08

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

이 문제는 무리식 $\sqrt{9n^2+12n}-3n$에 수렴하는 부분이 없어 바로 계산할 수 없을 거야. 그렇기 때문에 먼저 분자를 유리화한 후, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 적용하여 풀어보자.

☑ 분자의 유리화

❸ 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

대표 기출문제

☑ 등비수열의 수렴과 발산

주어진 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이야. 등비수열이 수렴하기 위한 조건을 생각하면 문제를 해결할 수 있겠지?

01

☑ 등비수열의 수렴과 발산

'$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n+2^n}{4^n+3}$'이라는 표현에서 4^n, 2^n을 보고 등비수열의 극한의 개념을 활용해야 함을 알 수 있어.
수열의 극한에 대한 기본 성질을 활용해 문제를 해결해 보자.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

02~04

☑ 등비수열의 수렴과 발산

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

05

☑ 등비수열의 수렴과 발산

'$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=10$'이라는 표현에서 $\frac{1}{3^n}$, $\frac{1}{2^n}$을 보고 등비수열의 극한의 개념을 활용해야 함을 알 수 있어. 수열의 극한에 대한 기본 성질을 활용해 문제를 해결해 보자.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

06

☑ 등비수열의 수렴과 발산

함수 $f(x)$는 등비수열의 극한으로 표현된 함수야. 이때, 기억해야 할 것은 등비수열은 공비의 범위에 따라 수렴과 발산이 달라지고, 수렴시에도 역시 공비에 따라 그 수렴하는 극한값이 달라진다는 것, 당연히 공비를 중심으로 접근해야겠지? 따라서 $f(x)$도 x의 범위에 따라 함수식이 달라질 것이므로 이를 중심으로 문제에 접근해보면 좋을 것 같아.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

07

☑ 등비수열의 수렴과 발산

$f(x)$는 등비수열의 극한을 통해 정의된 함수야. 따라서 x의 값의 범위에 따라 $f(x)$의 함수식도 달라지겠지? 그러니 우선 $f(x)$의 함수식을 x의 범위에 따라 정리하는 것이 좋아 보여. 일단 $x=1$일 때, $f(1)=\frac{a}{4}$인 것은 간단히 구할 수 있어. 그렇다면 합성함수의 뜻에 의해 $f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 a의 값을 구하면 되겠지?

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

☑ 합성함수의 뜻

08

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

'$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$'의 표현에서 수열의 극한값을 구해야 함을 알 수 있지? 수열의 극한을 구하는 방법은 크게 세 가지가 있어.

'수열의 수렴과 발산'의 뜻에 따라 구하는 방법,
'수열의 극한에 대한 기본 성질'을 이용하는 방법,
'수열의 극한값의 대소 관계'를 이용하는 방법
이 있지.

수열의 수렴과 발산의 뜻에 따라 극한값을 구하기 어렵다면 주어진 조건들을 활용해 $\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$을 n에 관한 식으로 나타낸 후 수열의 극한에 대한 기본 성질을 활용해 그 극한값을 계산한다면 그 값을 구할 수 있을 거야.

☑ 등비수열의 수렴과 발산

4 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

대표 기출문제

☑ 급수의 뜻

급수는 결국 부분합의 극한이야. 부분합인 $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$을 우선적으로 간단하게 나타낸 뒤, $n\to\infty$일 때 이 부분합이 한없이 가까워지는 값을 구하면 돼.

$\frac{2}{k(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$임을 활용하면 식을 간단하게 나타낼 수 있을 거야.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

01

☑ **등비급수**

수열 $\{a_n\}$이 등비수열이라는 조건이 꽤나 중요해.
등비수열의 극한은 수열의 공비에 따라서 수렴과 발산이 정해지지? 이를 활용하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=6$을 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$의 공비와 첫째항을 구할 수 있을 거야.
그 뒤에는 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$도 마찬가지로 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값도 구할 수 있어.

☑ 등비수열의 극한

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

02

☑ **급수와 일반항 사이의 관계**

급수가 수렴하기 위해 필요한 조건을 공부해본적이 있지?
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하려면 반드시 수열 $\{a_n\}$은 0으로 수렴해야 하는 것이 급수의 수렴과 일반항의 극한 사이의 관계야.
이 문제는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴한다는 것이 주어져 있으니 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값이 0이 되어야만 한다는 것을 알 수 있겠지?
이를 통해 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2a_n^2+3n^2}{a_n^2+n^2}$의 값도 구할 수 있을 거야.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

03

☑ **급수의 수렴과 발산**

급수는 부분합의 극한이므로 부분합 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n$을 먼저 구한 후, $n\to\infty$일 때 이 부분합이 수렴할 조건을 활용하면 문제를 해결할 수 있을 거야.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

☑ **등비급수의 수렴과 발산**

'급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$이 수렴'이라는 표현에서 $\left(\frac{x}{5}\right)^n$이 등비수열임을 알 수 있어. 따라서 이 문제는 등비수열의 급수, 즉 등비급수의 수렴에 관한 문제임을 알 수 있지. 그럼 등비급수가 수렴할 조건을 활용하면 문제를 해결할 수 있겠지?

04

☑ **급수와 일반항 사이의 관계**

급수 '$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)$'이 수렴하므로 급수와 일반항 사이의 관계를 통해 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-3)=0$임을 알 수 있어.
이를 이용하면 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값도 알 수 있지? 그 후에 극한값 '$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}$'에 대해서는 수열의 극한에 대한 기본 성질을 활용하면 문제를 풀 수 있을 거야.

☑ 수열의 극한에 대한 기본 성질

5 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
6 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

대표 기출문제

☑ **등비급수의 활용**

문제에서 R_1, R_2, …의 그림을 살펴보면 계속해서 같은 모양의 도형이 반복되어 나타남을 알 수 있어. 게다가 반복되어 나타나는 도형은 일정한 크기로 계속 작아지면서 나타나. 즉, 닮음비가 일정한 도형이 계속해서 나타나기 때문에 나타나는 도형의 넓이의 합인 S_n은 등비수열의 합인 것을 알 수 있지. 그렇다면 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 등비급수겠지?
등비급수의 값은 첫째항 S_1과 공비 r만 알면 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}$과 같이 쉽게 구할 수 있으니 이를 기억하고 문제를 풀어보자.

☑ 삼각함수의 뜻

☑ 부채꼴의 넓이

01

☑ **등비급수의 활용**

반복되는 도형의 넓이에 대한 극한을 묻는 문제는 그 형태가 등비급수를 띠는 경우가 대부분이야. 그렇다면 문제를 해결하기 위해서는 그 등비급수의 첫째항과 공비를 찾아내는 것이 핵심이야. 첫째항을 찾기 위해서는 R_1에서 주어진 도형의 넓이를 계산하면 돼. 공비의 경우 R_1과 R_2의 넓이를 계산해 그 비율을 공비로 바로 사용할 수도 있지만 그것보다 을 포함하는 직각삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$과 $\mathrm{OA_2B_2}$의 닮음비를 계산해 제곱하는 것이 더 쉽게 공비를 구하는 방법이야.

제 2 부

정답과 해설

III 적분법

1 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

01. ④	**02.** ⑤	**03.** ④	**04.** ②	**05.** ②
06. ⑤	**07.** ⑤	**08.** ①	**09.** ⑤	

대표 기출문제 2019학년도 수능 가형 16번

$x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$
④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

칼개념

☑ 치환적분법

주어진 식의 좌변과 우변을 각각 관찰해보자.
우변은 부정적분을 쉽게 구할 수 있는 함수이므로 정적분 값을 계산할 수 있어, 또한, 좌변의 $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)$항을 살펴보면, $g(x)=\frac{1}{x}$라 할 때, $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$이므로 $\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=-g'(x)f(g(x))$가 돼. 따라서 치환적분법을 이용할 수 있겠지?

☑ 정적분의 성질-실수배, 합, 차

☑ 함수 $y=x^r$ (r는 실수)의 부정적분

☑ 정적분의 뜻

풀이

주어진 식의 양변을 $\frac{1}{2}$부터 2까지 적분하면

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

이고, 정적분의 성질에 의해

$$\underbrace{2\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx}_{\text{(정적분의 성질-실수배, 합, 차)}}$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}dx$$

이다. 이때, $t=\frac{1}{x}$라 하면 $\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}$이다.

따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{\frac{1}{2}}^{2}f\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{dt}{dx}dx$$

$$=-\int_{2}^{\frac{1}{2}}f(t)dt$$

$$=\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(t)dt}_{\text{(정적분의 성질-실수배, 합, 차)}}$$

이므로 좌변을 정리하면

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=2\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(t)dt$$

$$=3\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$$

이고, 우변의 정적분 값을 계산하면

$$\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}dx}_{\text{(함수 } y=x^r \text{ (}r\text{는 실수)의 부정적분)}}$$

$$=\underbrace{[\ln x]_{\frac{1}{2}}^{2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}}_{\text{(정적분의 뜻)}}$$

$$=\ln 2-\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+2$$

$$=2\ln 2+\frac{3}{2}$$

이다.

따라서

$$3\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=2\ln 2+\frac{3}{2}$$

이므로 구하는 값은

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$$

이다.

칼개념

☑ **함수 $y=x^r$ (r는 실수)의 부정적분**

주어진 식에서 반복하여 나타나는 함수 $y=x$와 $y=\frac{1}{x}$에 주목해 보면 함수 $y=\frac{1}{x}$가 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있지? 즉, 함수 $y=\frac{1}{x}$은 역함수가 자기 자신인 함수야. 이를 활용하면 함수 $f(x)$를 x에 대한 식으로 정리할 수 있어.

☑ 정적분의 뜻

다른 풀이

모든 양수에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

이므로 주어진 식의 양변에 x 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하여 정리하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+x^2f(x)=x+x^2$$

이고, 주어진 식의 양변에 $2x^2$을 곱하면

$$4x^2f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+2$$

이므로 $f\left(\frac{1}{x}\right)$항을 소거하면

$$3x^2f(x)=-x^2+x+2$$

즉, $f(x)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}$이다.

따라서 구하는 값은

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^2}\right)dx$$

$$=\underbrace{\left[-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{2}{3x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}}_{\text{(정적분의 뜻)}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}\ln 2-1\right)-\left(\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$$

이다.

정답 / ②

풀이를 풀다

항등식의 뜻과 성질

문제에서 '모든 양수 x에 대하여'와 같은 표현이 등장할 때 꼭 항등식의 뜻을 떠올리고 함께 성질을 떠올리면 좋을 것 같아.
어떤 식이 '모든 양수' 혹은 '모든 실수'에 대하여 성립하면 그 식을 항등식이라 하고, 이 항등식은 늘 같으므로 두 가지 성질을 가져.
첫 번째가 어떤 양수 혹은 실수를 대입해도 모두 성립하기 때문에 항등식에는 무엇을 넣어도 된다는 거야. 즉, 문제에 주어진 식에 '모든 양의 실수를 대입해도 된다'라는 것을 떠올렸다면, x자리에 $\frac{1}{x}$을 대입할 수 있겠다는 발상도 자연스레 얻을 수 있는 거지.
두 번째는 등호를 기준으로 양변이 늘 같은 식이라는 거야. 즉, 미분하거나 적분하더라도 양변은 늘 항상 같지.
만약 주어진 식만으로 해결하기 어렵다면 미분, 적분뿐만 아니라 다양하게 식을 변형해도 된다는 뜻이기도 해.
단, 등호가 성립하도록 변형해야 해. 예를 들어, 좌변에서만 어떤 수를 더하거나 빼면 안 된다는 뜻이야.
이 항등식의 표현을 가장 많이 만나볼 수 있는 문제로 정적분과 미분 사이의 관계를 이용하는 문제가 있는데, 그런 종류의 문제에도 종종 '모든 실수 x에 대하여'라는 표현이 등장하는 것을 확인 할 수 있어. 그때도 같은 것을 떠올리면 좋을 것 같아. 물론 2019학년도 수능 가형 21번에서도 '모든 실수 x에 대하여'라는 표현이 있으므로 이를 떠올려도 좋아.

01

2022학년도 5월 예시문항 '미적분' 23번

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx$의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

칼개념

☑ **정적분의 뜻**

삼각함수의 정적분에 관한 간단한 문제야. 미분했을 때 $\sin x$가 나오는 함수를 찾을 수 있다면 쉽게 해결할 수 있겠지?

☑ 삼각함수의 적분