홀로 공부하는 수능

2022 학년도 개정 수능 수학

블랙홀수

기하

문제

도서출판 홀수
Holsoo Publishers

블랙홀수

홀로 공부하는 수능 수학 기출 분석

새롭게 바뀐 2022학년도 수능 수학 어떻게 공부해야 할까?

2022학년도 수능 수학은 2015 개정 교육과정의 취지에 따라 공통과목+선택과목 구조 체제로 전환됩니다.
무엇이 어떻게 바뀌었을까요?

① 수학에서 공통과목은 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'이고, 선택과목은 '확률과 통계', '미적분', '기하'입니다.
② 공통과목은 공통 응시하고 선택과목 중 1과목을 선택하여 응시하기 때문에 두 개의 시험지를 받게 됩니다.
③ 총 30문항 중, 공통과목은 22문항(선다형 15문항/단답형 7문항)이며, 선택과목은 8문항(선다형 6문항/단답형 2문항)입니다.

	공통과목 (수학Ⅰ, 수학Ⅱ)	선택과목 택1 (확률과 통계, 미적분, 기하)	합계
문항 수	22문항 (선다형 15문항/단답형 7문항)	8문항 (선다형 6문항/단답형 2문항)	30문항 (선다형 21문항/단답형 9문항)
배점	74점 (선다형 50점/단답형 24점)	26점 (선다형 18점/단답형 8점)	100점 (선다형 68점/단답형 32점)
시험 시간	100분		

수능 수학이 새롭게 바뀌었으니, 이전의 기출문제를 분석하는 것은 무용지물일까요?
아닙니다! 수능 시험의 형식은 바뀌었지만, 수능 수학 시험이 수험생에게 요구하는 학습 내용은 그대로입니다.
변화된 형식에 익숙해지되, 수능 수학에서 요구하는 지식과 시험의 성격은 기출 분석을 통해 발견해야 합니다.
우리가 기출문제를 분석해야 하는 이유는 다음과 같습니다.

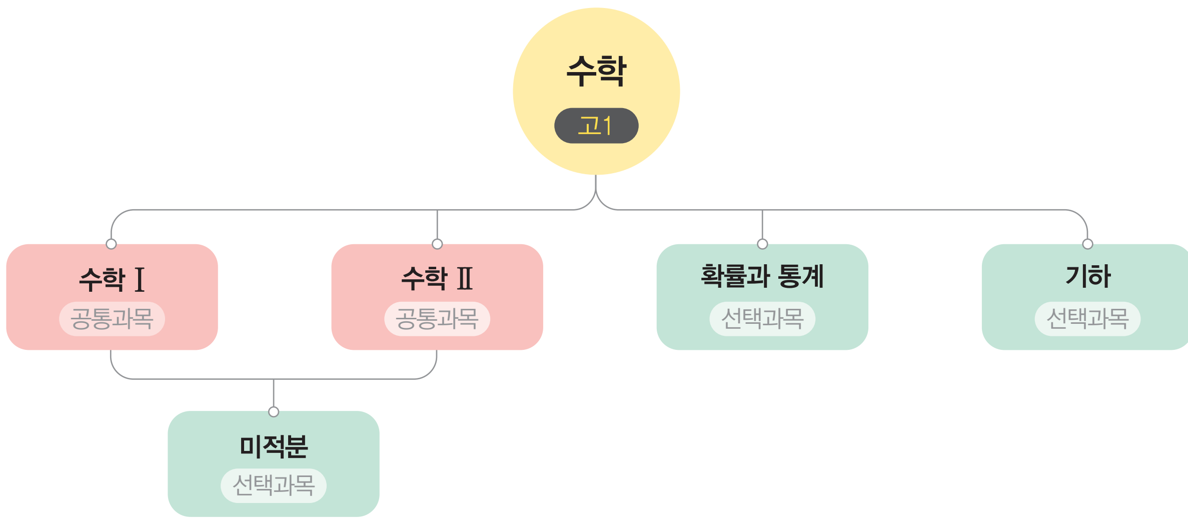
1
기출 분석을 통해 수능 수학 시험의 성격을 이해할 수 있습니다.

2
기출 분석을 통해 수능에서 요구하는 문제 해결의 사고 과정을 알 수 있습니다.

3
기출 분석을 통해 평가원에서 사용하는 표현에 익숙해질 수 있습니다.

2022학년도 수능 수학 학습법

2015 개정 교육과정에서 수학 학습의 위계성과 연계성



2015 개정 교육과정에서 수학 과목의 위계 · 연계성을 보면 '미적분'을 제외한 나머지 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ', '확률과 통계', '기하'는 위계가 없습니다. 따라서 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ', '확률과 통계', '기하' 중에서는 어떤 과목부터 학습을 시작해도 무방합니다. 학생 개개인의 계획 및 여건에 맞게 학습 순서를 정할 수 있다는 뜻입니다.

미적분 선택

'미적분'의 학습 내용은 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'의 학습 내용과 밀접한 관련이 있으므로 '미적분'을 선택한 학생은 반드시 공통과목인 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'를 학습한 이후에 선택과목 '미적분'을 학습해야만 합니다.

확률과 통계 / 기하 선택

'확률과 통계' 혹은 '기하'를 선택한 학생은 필요에 맞게 학습 순서를 정해도 되지만 특별히 정하지 않았다면, 공통과목인 '수학Ⅰ', '수학Ⅱ'를 먼저 공부한 다음에 자신이 선택한 선택과목을 공부하는 것을 권장합니다.

! 단, 고등학교 1학년 때 배우는 '수학' 과목의 개념들은 간접적으로 출제 범위에 포함되며, 모든 공통과목과 선택과목의 기본입니다. '수학' 에서 배우는 핵심 개념과 내용 요소는 아래에 정리를 해 두었습니다. 본격적으로 공통과목과 선택과목을 공부하기 앞서 '수학' 과목에서 부족한 부분이 있다면 반드시 교과서를 통해 학습한 이후에 기출문제를 분석해야 합니다.

- **다항식** – 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해
- **방정식과 부등식** – 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식과 부등식
- **도형의 방정식** – 평면좌표, 직선의 방정식, 원의 방정식, 도형의 이동
- **집합과 명제** – 집합, 명제
- **함수와 그래프** – 함수, 유리함수와 무리함수
- **경우의 수** – 경우의 수, 순열과 조합

홀로 공부하는 이상적인 수능 수학 기출 분석 4 STEP

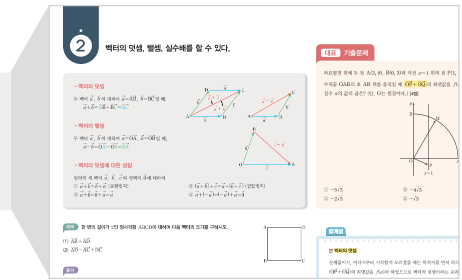
‘최근 5개년 기출 + 2022학년도 예시문항’과 ‘교과서의 개념’이 만나면 ‘수학의 기준’이 잡힌다.

• 2022학년도 수능 수학을 대비하기 위해서는 2015 개정 교육과정을 바탕으로 한 ‘교과서 개념’이 반영된 기출문제를 기반으로 공부해야 합니다.

• 수능 수학에서의 평가 요소는 교육과정의 성취기준에 근거하고 있습니다. 성취기준은 적용된 교육과정에 따라 다르기 때문에 해당 교육과정의 범위 안에서 기출 학습을 하여야 합니다. 그런데 ‘기하’의 경우 이에 맞는 기출문제의 수가 상대적으로 부족하여 이전 기출문제들 중에서 현 교육과정에 맞는 문제들을 선별하여 추가로 수록하였습니다.

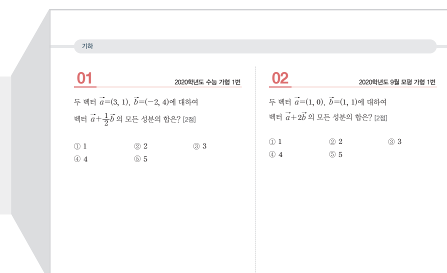
STEP 1

성취기준에 따른 교과서 개념을 정리하고 예제를 통해 구체적으로 개념을 체화한 후, 칼개념을 어떻게 실제 문제 풀이에 적용해 나가는지 대표 기출문제로 연습합니다.



STEP 2

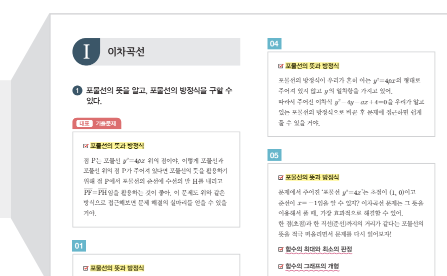
동일한 성취기준으로 분류된 5개년 기출문제들을 통해 스스로 문제 풀이에 필요한 칼개념이 무엇인지, 그 칼개념을 어떻게 적용하는지를 생각하며 학습합니다.



N회독

STEP 3

그룹화된 문제를 풀어본 후, 각 문제마다 자신의 풀이 과정에 적용한 칼개념과 〈해설 책〉 [1부]의 칼개념을 비교하여 제대로 적용했는지, 빠뜨린 개념은 없는지를 확인합니다.



불일치

일치

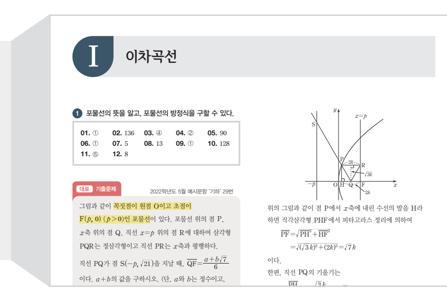
STEP 4

자신의 풀이에 정확한 칼개념을 적용하지 않았거나 빠뜨린 개념이 있다면 그 개념이 무엇인지 확인하고, 다시 올바르게 칼개념을 적용하여 문제를 풀어봅니다.

개념 이해 부족

제시된 칼개념을 정확하게 이해할 수 없다면 〈문제 책〉에 제시된 성취기준에 따른 교과서 개념을 다시 학습한 후, 그 문제를 반복해서 풀어봅니다.

자신의 풀이에 정확한 칼개념이 잘 적용되었다면, 자신의 풀이와 〈해설 책〉 [2부]의 해설을 비교해 가며 한 번 더 정리합니다.

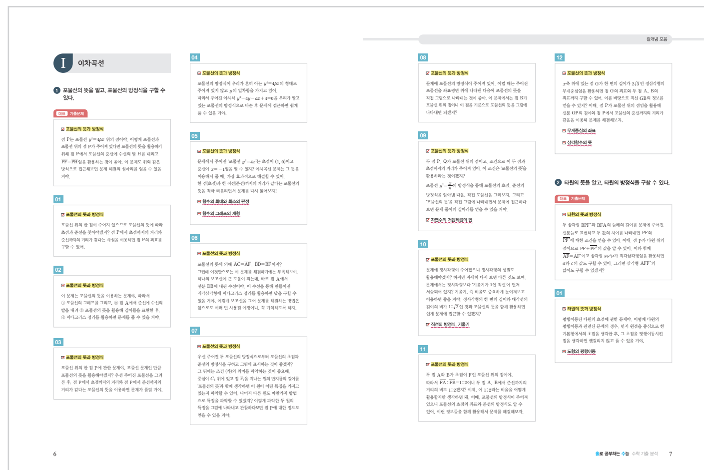


블랙홀수의 심화 해설

• 동일한 성취기준과 평가 요소가 반영된 개념별로 분류된 문제들에 대한 정답과 해설을 친절하고 자세히 담았습니다.

1부 문제풀이에 적용된 칼개념 모음

문제별로 풀이에 적용된 칼개념과 부개념만 따로 모아 놓아, 학생들이 스스로 문제를 풀어본 후 자신이 문제풀이에 적용한 개념들과 쉽게 비교할 수 있도록 하였습니다.

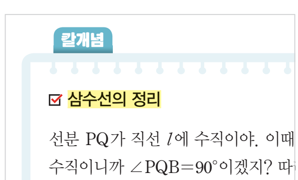


2부 정답과 해설

수록된 모든 기출문제를 빠짐없이 하나하나 친절하게 해설하였습니다.
칼개념을 적용해서 풀어나가는 과정에서, 문제의 상황을 이해하는 데 도움이 되는 개념이나 심화된 개념이 필요할 때 모두의 질문, 풀이를 풀다, 개념홀릭을 통해 스스로 학습하고 분석하는 데 어려움이 없도록 하였습니다.

칼개념

발문을 통해 어떤 개념을 떠올리고 문제를 해석해야 하는지를 정리하였습니다. 문제 풀이에 이용된 핵심적인 칼개념은 형광펜으로, 부수적인 개념은 밑줄로 표시해두어 스스로 학습하는 데 도움이 되도록 하였습니다.

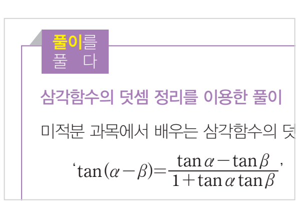


모두의 질문

학생들이 문제를 풀 때 자주 하는 실수, 질문들에 대한 해결책과 답을 수록하여 불안감과 궁금증을 해소할 수 있도록 하였습니다.

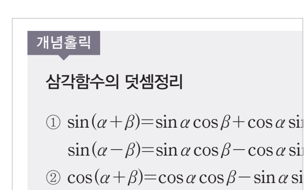
풀이를 풀다

풀이와 관련된 심화된 해설이나 두 가지 이상의 풀이가 가능할 때 어떤 풀이가 더 유리한지 등을 다시 한번 풀어서 깊이 있게 설명하였습니다.



개념홀릭

문제 풀이에 직접 사용되지는 않지만, 문제의 상황을 이해하고 풀이를 진행하는 데에 기반이 되는 기본 개념을 소개하여 탄탄한 기본기 쌓기에 도움이 될 수 있도록 하였습니다.



기하 차례

기하 3회독 완성 PLAN

• STEP별로 학습을 완료하면 체크하세요. ☑ 그리고 기하 전체 1회독 학습 완료 후, 2 · 3회독을 시작하세요.

Ⅰ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1	p.12	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/
2	p.22	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/
3	p.34	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/
4	p.45	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/

Ⅱ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1 / 2 / 3	p.64	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/
4 / 5	p.81	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/

Ⅲ 단원		STEP ❶	STEP ❷	STEP ❸	STEP ❹	학습완료		학습 날짜
성취기준	문제 책							
1 / 2 / 3	p.96	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/
4 / 5 / 6 / 7	p.115	□	□	□	□	1회	□	/
		□	□	□	□	2회	□	/
		□	□	□	□	3회	□	/

네가 혼자여도 괜찮은 이유

I

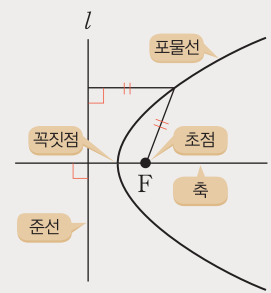
이차곡선

★ 1

포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

• 포물선의 뜻과 방정식

평면 위에서 한 점 F와 F를 지나지 않는 직선 l이 주어져 있을 때, 점 F와 직선 l로부터 거리가 같은 점의 집합을 포물선이라고 한다. 이때, 점 F를 포물선의 초점, 직선 l을 포물선의 준선이라고 한다.
 또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 축, 포물선과 축이 만나는 점을 포물선의 꼭짓점이라고 한다.



> (ⅰ) 초점이 F(p, 0)이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은
> $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)
> (ⅱ) 초점이 F(0, p)이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은
> $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)

• 포물선의 방정식 유도과정

(ⅰ) 초점이 F(p, 0)이고 준선이 $x=-p$ (단, $p\neq0$)인 포물선의 방정식을 포물선의 뜻에 따라 유도해보자.

포물선 위의 점 P(x, y)에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 뜻에 의해

$\overline{PF}=\overline{PH}$

이다. 이때, 점 H의 좌표는 H($-p$, y)이므로

$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$

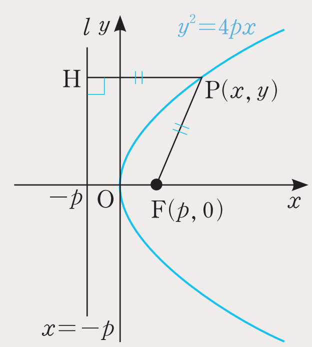
이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$

$y^2=(x+p)^2-(x-p)^2$

$y^2=4px$

를 얻는다.



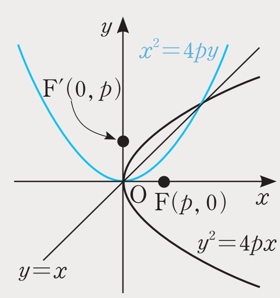
(ⅱ) 초점이 F′(0, p)이고 준선이 $y=-p$ (단, $p\neq0$)인 포물선의 방정식은

(ⅰ)과 같은 방법으로 유도할 수 있으며, 그 결과는

$x^2=4py$

임을 쉽게 확인할 수 있다.

이때, (ⅰ), (ⅱ)에서의 포물선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭임도 확인할 수 있다.



예제 1 다음 포물선의 방정식을 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(1) 초점이 F(1, 0), 준선이 $x=-1$인 포물선

(2) 초점이 F(0, -2), 준선이 $y=2$인 포물선

풀이

(1) 포물선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$라 하자. 점 P에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표는 $(-1, y)$이다. 포물선의 뜻에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH}$$
$$\overline{PF}^2=\overline{PH}^2$$

이므로

$$(x-1)^2+y^2=(x+1)^2+0^2$$
$$y^2=(x+1)^2-(x-1)^2$$
$$y^2=\{(x+1)+(x-1)\}\{(x+1)-(x-1)\}$$
$$y^2=4x$$

이다.

이때, 포물선의 축은 $(1, 0)$을 지나고 $x=-1$에 수직인 직선이므로 $y=0$, 즉 x축과 같으며 꼭짓점은 $(0, 0)$이다.

(2) 초점이 $F(0, p)$이고 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은

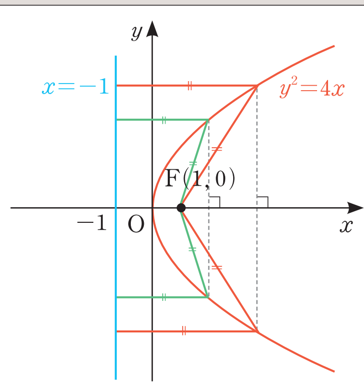
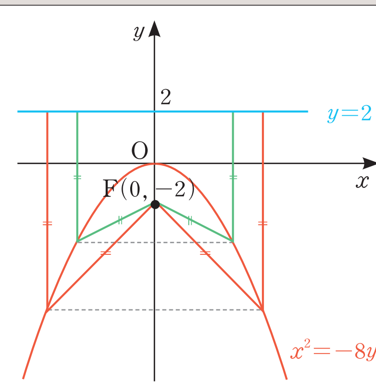
$$x^2=4py \ (\text{단, } p\neq 0)$$

이므로 주어진 포물선의 방정식은

$$x^2=4\times(-2)\times y$$
$$x^2=-8y$$

이다.

이 포물선의 축은 $x=0$, 즉 y축과 같으며 꼭짓점은 $(0, 0)$이다.

포물선 $y^2=4x$의 그래프	포물선 $x^2=-8y$의 그래프
	

예제 2 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

(1) $y^2=-12x$

(2) $x^2+4y=0$

풀이

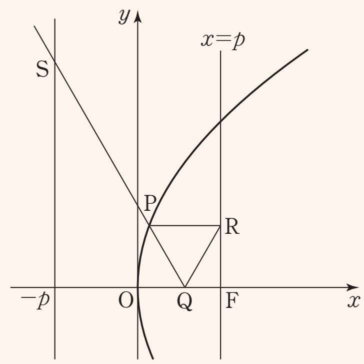
(1) $y^2=-12x$는 $y^2=4px$에서 $p=-3$이므로
초점의 좌표는 $(-3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=3$이다.

(2) $x^2+4y=0$, 즉 $x^2=-4y$는 $x^2=4py$에서 $p=-1$이므로
초점의 좌표는 $(0, -1)$, 준선의 방정식은 $y=1$이다.

대표 기출문제

2022학년도 5월 예시문항 '기하' 29번

그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F$(p, 0)$ $(p>0)$인 포물선이 있다. 포물선 위의 점 P, x축 위의 점 Q, 직선 $x=p$ 위의 점 R에 대하여 삼각형 PQR는 정삼각형이고 직선 PR는 x축과 평행하다. 직선 PQ가 점 S$(-p, \sqrt{21})$을 지날 때, $\overline{\text{QF}}=\dfrac{a+b\sqrt{7}}{6}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) **[4점]**



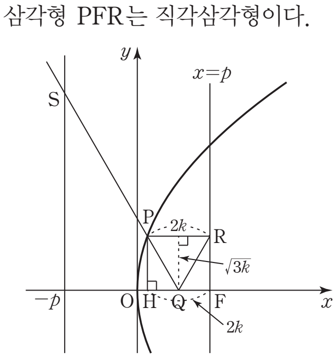
칼개념

☑ 포물선의 뜻과 방정식

점 P는 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이야. 이렇게 포물선과 포물선 위의 점 P가 주어져 있다면 포물선의 뜻을 활용하기 위해 점 P에서 포물선의 준선에 수선의 발 H를 내리고 $\overline{\text{PF}}=\overline{\text{PH}}$임을 활용하는 것이 좋아. 이 문제도 위와 같은 방식으로 접근해보면 문제 해결의 실마리를 얻을 수 있을 거야.

풀이

정삼각형 PQR의 한 변의 길이를 $2k$라 하면 정삼각형의 높이는 $\sqrt{3}k$이므로 $\overline{\text{RF}}=\sqrt{3}k$이다.
그러므로 직선 PR는 x축과 평행하고, 직선 $x=p$는 x축과 수직이므로 삼각형 PFR는 직각삼각형이다.



위의 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PHF에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\text{PF}}&=\sqrt{\overline{\text{PH}}^2+\overline{\text{HF}}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2}=\sqrt{7}k\end{aligned}$$

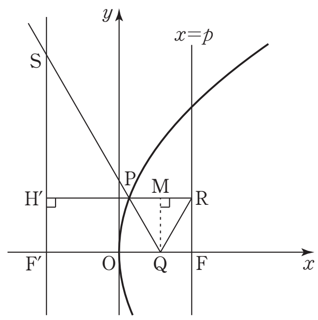
이다.
한편, 직선 PQ의 기울기는

$$-\frac{\overline{\text{PH}}}{\overline{\text{HQ}}}=-\frac{\sqrt{3}k}{k}=-\sqrt{3}$$

이므로 직선 $x=-p$와 x축이 만나는 점을 F′이라 하면

$$-\frac{\overline{\text{SF}'}}{\overline{\text{F}'\text{Q}}}=-\frac{\sqrt{21}}{\overline{\text{F}'\text{Q}}}=-\sqrt{3}$$

에서 $\overline{\text{F}'\text{Q}}=\sqrt{7}$이다.



이때, 점 P에서 포물선의 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H′이라 하면 포물선의 뜻에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH'}}$

이므로 선분 PR의 중점을 M이라 할 때,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{F'Q}}&=\overline{\mathrm{H'M}}=\overline{\mathrm{PH'}}+\overline{\mathrm{PM}}\\&=\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{7}k+k=(\sqrt{7}+1)k\\&=\sqrt{7}\end{aligned}$$

에서 $k=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$이다.

따라서

$$\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{MR}}=k=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}=\frac{7-\sqrt{7}}{6}$$

이므로 $a=7$, $b=-1$이다.

즉, 구하는 값은 $a+b=7+(-1)=6$이다.

정답 / 6

01

2020학년도 수능 가형 1번

두 벡터 $\vec{a}=(3, 1)$, $\vec{b}=(-2, 4)$에 대하여
벡터 $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

02

2020학년도 9월 모평 가형 1번

두 벡터 $\vec{a}=(1, 0)$, $\vec{b}=(1, 1)$에 대하여
벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

03

2020학년도 6월 모평 가형 22번

벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$에 대하여 벡터 $10\vec{a}$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

04

2019학년도 수능 가형 1번

두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

네가 혼자여도 괜찮은 이유

제 1 부

칼개념 모음

I 이차곡선

❶ 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

대표 기출문제

☑ 포물선의 뜻과 방정식

점 P는 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이야. 이렇게 포물선과 포물선 위의 점 P가 주어져 있다면 포물선의 뜻을 활용하기 위해 점 P에서 포물선의 준선에 수선의 발 H를 내리고 $\overline{PF}=\overline{PH}$임을 활용하는 것이 좋아. 이 문제도 위와 같은 방식으로 접근해보면 문제 해결의 실마리를 얻을 수 있을 거야.

01

☑ 포물선의 뜻과 방정식

포물선 위의 한 점이 주어져 있으므로 포물선의 뜻에 따라 초점과 준선을 찾아야겠지? 점 P에서 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같다는 사실을 이용하면 점 P의 좌표를 구할 수 있어.

02

☑ 포물선의 뜻과 방정식

이 문제는 포물선의 뜻을 이용하는 문제야. 따라서 ① 포물선의 그래프를 그리고, ② 점 A에서 준선에 수선의 발을 내려 ③ 포물선의 뜻을 활용해 길이들을 표현한 후, ④ 피타고라스 정리를 활용하면 문제를 풀 수 있을 거야.

03

☑ 포물선의 뜻과 방정식

포물선 위의 한 점 P에 관한 문제야. 포물선 문제인 만큼 포물선의 뜻을 활용해야겠지? 우선 주어진 포물선을 그려 본 후, 점 P에서 초점까지의 거리와 점 P에서 준선까지의 거리가 같다는 포물선의 뜻을 이용하면 문제가 풀릴 거야.

04

☑ 포물선의 뜻과 방정식

포물선의 방정식이 우리가 흔히 아는 $y^2=4px$의 형태로 주어져 있지 않고 y의 일차항을 가지고 있어.
따라서 주어진 이차식 $y^2-4y-ax+4=0$을 우리가 알고 있는 포물선의 방정식으로 바꾼 후 문제에 접근하면 쉽게 풀 수 있을 거야.

05

☑ 포물선의 뜻과 방정식

문제에서 주어진 '포물선 $y^2=4x$'는 초점이 $(1, 0)$이고 준선이 $x=-1$임을 알 수 있지? 이차곡선 문제는 그 뜻을 이용해서 풀 때, 가장 효과적으로 해결할 수 있어.
한 점(초점)과 한 직선(준선)까지의 거리가 같다는 포물선의 뜻을 적극 떠올리면서 문제를 다시 읽어보자!

☑ 함수의 최대와 최소의 판정

☑ 함수의 그래프의 개형

06

☑ 포물선의 뜻과 방정식

포물선의 뜻에 의해 $\overline{AC}=\overline{AF}$, $\overline{BD}=\overline{BF}$이지?
그런데 이것만으로는 이 문제를 해결하기에는 부족해보여.
하나의 보조선이 큰 도움이 되는데, 바로 점 A에서 선분 DB에 내린 수선이야. 이 수선을 통해 만들어진 직각삼각형에 피타고라스 정리를 활용하면 답을 구할 수 있을 거야. 이렇게 보조선을 그어 문제를 해결하는 방법은 앞으로도 여러 번 사용될 예정이니, 꼭 기억하도록 하자.

07

☑ 포물선의 뜻과 방정식

우선 주어진 두 포물선의 방정식으로부터 포물선의 초점과 준선의 방정식을 구하고 그림에 표시하는 것이 좋겠지?
그 뒤에는 조건 (가)의 의미를 파악하는 것이 중요해.
중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원의 반지름의 길이를 '포물선의 뜻'과 함께 생각하면 이 원이 어떤 특징을 가지고 있는지 파악할 수 있어. 나머지 다른 원도 마찬가지 방법으로 특징을 파악할 수 있겠지? 이렇게 파악한 두 원의 특징을 그림에 나타내고 관찰하다보면 점 P에 대한 정보도 얻을 수 있을 거야.

08

☑ **포물선의 뜻과 방정식**

문제에 포물선의 방정식이 주어져 있어. 이럴 때는 주어진 포물선을 좌표평면 위에 나타낸 다음에 포물선의 뜻을 직접 그림으로 나타내는 것이 좋아. 이 문제에서는 점 B가 포물선 위의 점이니 이 점을 기준으로 포물선의 뜻을 그림에 나타내면 되겠지?

09

☑ **포물선의 뜻과 방정식**

두 점 P, Q가 포물선 위의 점이고, 조건으로 이 두 점과 초점까지의 거리가 주어져 있어. 이 조건은 '포물선의 뜻'을 활용하라는 것이겠지?

포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 방정식을 통해 포물선의 초점, 준선의 방정식을 알아낸 다음, 직접 포물선을 그려보자. 그리고 '포물선의 뜻'을 직접 그림에 나타내면서 문제에 접근하다 보면 문제 풀이의 실마리를 얻을 수 있을 거야.

☑ **자연수의 거듭제곱의 합**

10

☑ **포물선의 뜻과 방정식**

문제에 정사각형이 주어졌으니 정사각형의 성질도 활용해야겠지? 하지만 자세히 다시 보면 다른 것도 보여. 문제에서는 정사각형보다 '기울기가 1인 직선'이 먼저 서술되어 있지? 기울기, 즉 비율도 중요하게 눈여겨보고 이용하면 좋을 거야. 정사각형의 한 변의 길이와 대각선의 길이의 비가 $1:\sqrt{2}$인 것과 포물선의 뜻을 함께 활용하면 쉽게 문제에 접근할 수 있겠지?

☑ **직선의 방정식, 기울기**

11

☑ **포물선의 뜻과 방정식**

두 점 A와 B가 초점이 F인 포물선 위의 점이야. 따라서 $\overline{FA}:\overline{FB}=1:2$이니 두 점 A, B에서 준선까지의 거리의 비도 $1:2$겠지? 이제, 이 $1:2$라는 비율을 어떻게 활용할지만 생각하면 돼. 이때, 포물선의 방정식이 주어져 있으니 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식도 알 수 있어. 이런 정보들을 함께 활용해서 문제를 해결해보자.

12

☑ **포물선의 뜻과 방정식**

x축 위에 있는 점 G가 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형의 무게중심임을 활용하면 점 G의 좌표와 두 점 A, B의 좌표까지 구할 수 있어. 이를 바탕으로 직선 GB의 정보를 얻을 수 있지? 이때, 점 P가 포물선 위의 점임을 활용해 선분 GP의 길이와 점 P에서 포물선의 준선까지의 거리가 같음을 이용해 문제를 해결해보자.

☑ **무게중심의 좌표**

☑ **삼각함수의 뜻**

❷ 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

대표 기출문제

☑ **타원의 뜻과 방정식**

두 삼각형 BPF′과 BFA의 둘레의 길이를 문제에 주어진 선분들로 표현하고 두 값의 차이를 나타내면 $\overline{PF}$와 $\overline{PF'}$에 대한 조건을 얻을 수 있어. 이때, 점 P가 타원 위의 점이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}$의 값을 알 수 있어. 이와 함께 $\overline{AF}=\overline{AF'}$이고 삼각형 FF′P가 직각삼각형임을 활용하면 a와 c의 값도 구할 수 있어. 그러면 삼각형 AFF′의 넓이도 구할 수 있겠지?

01

☑ **타원의 뜻과 방정식**

평행이동된 타원의 초점에 관한 문제야. 이렇게 타원의 평행이동과 관련된 문제의 경우, 먼저 원점을 중심으로 한 기본형에서의 초점을 생각한 후, 그 초점을 평행이동시킨 점을 생각하면 헷갈리지 않고 풀 수 있을 거야.

☑ **도형의 평행이동**

02

☑ 타원의 뜻과 방정식

타원의 방정식이 흔히 우리가 알고 있는 '$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$'의 형태로 주어져 있지 않아. 따라서 주어진 이차식 '$4x^2+9y^2-18y-27=0$'을 우리가 알고 있는 타원의 방정식으로 바꾼 후, 문제에 접근하면 쉽게 풀 수 있을 거야.

☑ 도형의 평행이동

03

☑ 타원의 뜻과 방정식

우선 삼각형의 둘레의 길이를 선분들로 나타내봐.
그 후 점 Q가 타원 위에 있는 점임을 이용하면 타원의 방정식을 통해 $\overline{QF'}+\overline{QF}$의 값을 알 수 있지?
이를 활용하면 두 삼각형의 둘레의 길이의 합을 구할 수 있을 거야.

04

☑ 타원의 뜻과 방정식

주어진 타원의 방정식 '$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$'을 활용하면 두 초점 F, F'의 좌표를 구할 수 있지? 그렇다면 점 F와 점 A가 직선 $y=x$에 대칭임을 알 수 있어. 이렇게 주어진 도형에서의 대칭성을 파악해 합동인 삼각형을 찾아내어 타원의 성질을 활용할 수 있는 형태로 바꾸면 문제를 풀 수 있을 거야.

05

☑ 타원의 뜻과 방정식

'타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1$'의 방정식에서 타원의 초점과 장축의 길이에 대한 정보를 찾을 수 있지?
또한, '타원과 만나는 점 Q'에 대하여 '$\overline{PQ}+\overline{FQ}$'의 최댓값을 구하라고 했으므로 타원 위의 한 점 Q에서 두 초점 F, F'까지의 거리의 합이 일정하다는 타원의 뜻을 활용하면 문제를 해결할 수 있을 거야.

06

☑ 타원의 뜻과 방정식

☑ 포물선의 뜻과 방정식

타원과 포물선이 동시에 나오는 문제야. 우선 포물선의 뜻을 활용하기 위해 점 P에서 포물선의 준선에 수선을 내려야겠지? 그 후 점 P에서 x축에 수선의 발을 내린 후 주어진 길이들을 하나씩 표시해봐. 타원의 성질을 쓰는 것도 잊으면 안 되겠지? 타원의 성질에 의해 타원의 장축의 길이는 $\overline{PF}+\overline{PF'}$임을 알 수 있어. 이를 활용하면 문제가 해결될 거야.

07

☑ 타원의 뜻과 방정식

주어진 타원과 원을 통해 $\tan\theta$의 값을 구해야 하는데, 바로 구하는 것이 쉽지 않아 보여.
그렇다면 먼저 직각삼각형을 찾을 필요가 있겠지?
주어진 그림에서 삼각형 COF와 삼각형 COA가 직각삼각형임을 알 수 있어. 또, $\tan(\angle\text{CFB})=\frac{1}{4}$이고 삼각형 BFC가 이등변삼각형임을 통해 $\tan(\angle\text{BCF})=\frac{1}{4}$임을 알 수 있어. 이러한 사실들과 타원의 방정식을 이용해 두 삼각형 COF, COA의 모든 길이의 비를 알 수 있고, 삼각형의 넓이공식과 코사인법칙을 활용하면 $\sin\theta$의 값과 $\cos\theta$의 값을 구할 수 있을 거야. 이제, 삼각함수 사이의 관계를 통해 $\tan\theta$의 값을 구할 수 있겠지?

☑ 코사인법칙

☑ 삼각함수 사이의 관계

08

☑ 타원의 뜻

타원의 장축의 길이는 '타원의 뜻'에 있어서 중요한 의미를 가져. 장축의 길이가 4이므로 $\overline{PF}+\overline{PF'}=4$임을 알 수 있어. 게다가 직선 PF는 중심이 점 F인 원에 접하는 직선이니 $\angle\text{FPF'}=90°$임을 활용하면 문제를 해결할 수 있을 거야.

제 2 부

정답과 해설

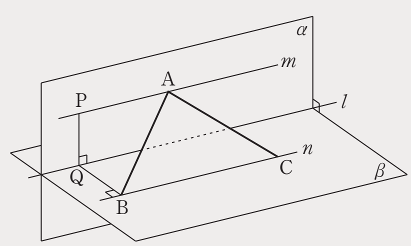
III 공간도형과 공간좌표

1. 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.
2. 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
3. 정사영의 뜻을 알고, 구할 수 있다.

01. ②	**02.** 12	**03.** 8	**04.** ③	**05.** ⑤
06. 12	**07.** 9	**08.** 15	**09.** 162	**10.** 40
11. 32	**12.** 45	**13.** ①	**14.** 10	

대표 기출문제 2022학년도 5월 예시문항 '기하' 25번

좌표공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위의 직선 m과 평면 β 위의 직선 n은 각각 직선 l과 평행하다. 직선 m 위의 $\overline{AP}=4$인 두 점 A, P에 대하여 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 직선 n에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\overline{PQ}=3$, $\overline{QB}=4$이고, 점 B가 아닌 직선 n 위의 점 C에 대하여 $\overline{AB}=\overline{AC}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]



① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

칼개념

삼수선의 정리

선분 PQ가 직선 l에 수직이야. 이때, 두 평면 α와 β가 수직이니까 $\angle PQB=90°$이겠지? 따라서 선분 PQ는 평면 β와 수직이야. 떠오르는 개념이 있지? 바로 삼수선의 정리야. 삼수선의 정리를 활용하면 $\overline{PB}\perp n$임을 알 수 있고, 이를 활용하면 삼각형 ABC의 높이도 구할 수 있을 거야. 그렇다면 삼각형 ABC가 이등변삼각형이란 것을 이용해 나머지 필요한 조건들을 구해보자.

풀이

두 평면 α와 β가 수직으로 만나므로

$\angle PQB=90°$

이다.

즉, $\overline{PQ}\perp\overline{QB}$이고 $\overline{PQ}\perp l$이므로 $\overline{PQ}\perp\beta$이다.

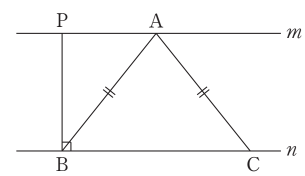
또한, $\overline{QB}\perp n$이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PB}\perp n$

이다.

마찬가지 방법으로 $\overline{PB}\perp m$임을 알 수 있다.

따라서 두 직선 m과 n을 포함하는 평면을 그림으로 나타내면 아래와 같다.



이때, 삼각형 PQB에서

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

이므로 점 A에서 직선 n에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{PB}=5$

이다.

또한, 삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

$\overline{BH}=\overline{HC}=\overline{AP}=4$

이다. 즉, $\overline{BC}=2\times\overline{BH}=8$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$

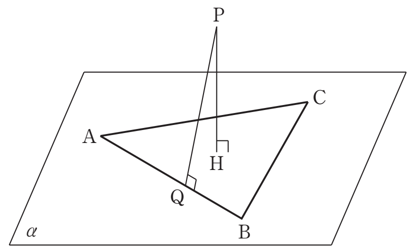
이다.

정답 / ②

01

2019학년도 9월 모평 가형 12번

그림과 같이 평면 α 위에 넓이가 24인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, $\overline{PH}=4$, $\overline{AB}=8$일 때, 선분 PQ의 길이는? [3점]



① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{22}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{26}$

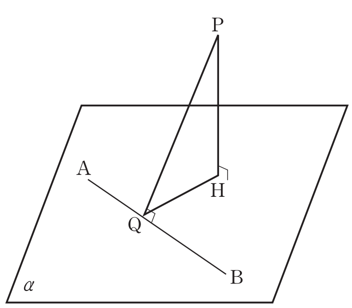
칼개념

☑ **삼수선의 정리**

삼수선의 정리는 두 직선 사이의 수직 관계를 찾을 수 있는 도구이기도 하고, 수직 관계를 찾는 과정에서 얻는 직각삼각형을 통해 몰랐던 선분의 길이도 쉽게 구할 수 있도록 도와줘. 이 문제에서는 어떤 직각삼각형으로부터 선분 PQ의 길이를 알아낼지 유의하면서 해결해보자.

☑ **직선과 평면의 수직**

풀이



문제의 조건에 따라 $\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$이므로
(직선과 평면의 수직)

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HQ}\perp\overline{AB}$

이다.

이때, 점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 선분 HQ의 길이는 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 길이의 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 삼각형 AHB의 넓이는 8이고 $\overline{AB}=8$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{HQ}\times\overline{AB}=8$

에서 $\overline{HQ}=2$이다.

직각삼각형 PQH에서 피타고라스 정리에 의해

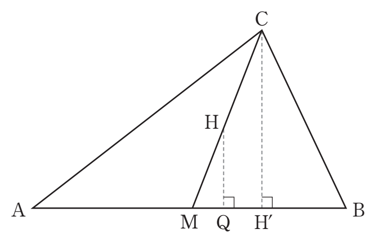
$\overline{PQ}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

이다.

정답 / ②

풀이를 풀 다

내분점 공식 유도과정(평행선 사이의 선분의 길이비)



풀이에서 '점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 선분 HQ의 길이는 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 길이의 $\frac{1}{3}$이다.'라는 말이 성립하는 이유가 뭘까? 문제에 주어진 그림으로 봤을 때는 세 점 C, H, Q가 한 직선 위에 있는 것처럼 보일 수 있지만 실제로는 그렇지 않을 수 있어! 그래서 위에 있는 그림과 같이 설명할게.
위 그림은 평면 α에 수직인 방향에서 삼각형 ABC를 본 그림이야. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 하자. 그럼 직선 HQ가 직선 CH′이 평행하므로

$\overline{MH}:\overline{HC}=\overline{MQ}:\overline{QH'}$

이 성립하겠지?
또한, 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이니까
$\overline{MH}:\overline{MC}=1:3$이므로 $\overline{HQ}:\overline{CH'}=1:3$이야.
이렇게 두 평행선 사이의 선분의 길이비가 같음을 이용하는 과정은, 선분 MC를 1:2로 내분하는 점인 H의 좌표를 구할 때 x좌표와 y좌표의 내분점을 각각 구해도 되는 원리와 같아.